Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Ferus

SS 06
10. Oktober 2006

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Beschreiben Sie geometrisch (mit einer Skizze) folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

a) $E = \{z \in \mathbb{C} : Re((1-\iota)z - 4) > 0\}$.

b) $F = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 2Re(z) + 3\}$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Für die Abbildung $f(z) = \iota^z = w$ bestimme und skizziere man das Bild des Quadrates mit den Ecken $0, 1, (1+\iota), \iota$.

3. Aufgabe

8 Punkte

Skizzieren Sie den konzentrischen Kreisring

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4\right\},$$

und geben Sie die Lösung zum Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta h(x,y) & = & 0, \text{ für } 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4 \\ h(x,y) & = & 0, \text{ für } (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ h(x,y) & = & 1, \text{ für } (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

an. (**Hinweis**: keine langen Berechnungen nötig, Lösung basiert auf einer sehr bekannten Funktion).

4. Aufgabe

8 Punkte

Seien $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z^2})}{z^2(z+1)^2}$ und $g(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^4}$.
Geben Sie die Singularitäten von f und g an und entscheiden Sie in jedem Fall, ob es wesentliche Singularitäten oder Polstellen sind. Falls eine Polstelle vorhanden ist, geben Sie auch ihre Ordnung an.

5. Aufgabe

8 Punkte

Für jedes $\lambda > 0$ ist die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$x^4 u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

durch $u(x) = x\left(A \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{x} + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$ gegeben, wobei A, B reelle Koeffizienten sind.
Falls diese Differentialgleichung auf dem Interval $[\frac{1}{2}; 1]$ betrachtet wird zusammen mit Dirichletschen Randbedingungen ($u(\frac{1}{2}) = u(1) = 0$), was sind die Eigenwerte λ_k und zugehörige Eigenfunktionen $u_k(x)$?
(**Hinweis**: $\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{1/2})\cos\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{1/2}) = \sin\sqrt{\lambda}$).
Welche Orthogonalitätsrelation genügen die Eigenfunktionen u_k und u_l für $k \neq l$?