Musterlösung Rechenteil — Analysis III f. Ing., 24. Juli 2007

1. Aufgabe

10 Punkte

Mit $v(x,y) = -y^3 + 3x^2y + y$ suchen wir $u(x,y)$, so dass

$$u_x = v_y = -3y^2 + 3x^2 + 1, \qquad u_y = -v_x = -6xy. \qquad \boxed{\textbf{4 P.}}$$

Also ist

$$u(x,y) = -3xy^2 + x^3 + x + \psi(y) = -3xy^2 + \varphi(x) \qquad \boxed{\textbf{4 P.}}$$

mit geeigneten Funktionen $\varphi(x), \psi(y)$. Es folgt

$$\varphi(x) = x^3 + x + C, \qquad \psi(y) = C$$

mit einer geeigneten Konstanten C, die durch $f(1) = 0$ fixiert wird:

$$f(x + \mathrm{i}y) = (-3xy^2 + x^3 + x) + \mathrm{i}(-y^3 + 3x^2y + y) + C$$
$$\implies f(1) = 2 + C = 0 \implies C = -2. \qquad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Also lautet der gesuchte Realteil

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = -3xy^2 + x^3 + x - 2. \qquad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Es ist $f(z) = z^3 + z - 2$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Wenn der Einheitskreis $|z| = 1$ mit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ parametrisiert wird, kann man das Integral als parametrisiertes Kurvenintegral lesen:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\alpha + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-\mathrm{i}z^{-1}}{\alpha + \frac{1}{2}(z + z^{-1})}\,\mathrm{d}z \\ &= -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\alpha z + 1}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4 P.}}$

Dieses Integral kann man mit dem Residuensatz lösen. Die Pole des Integranden liegen bei $-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ und bei $-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Wegen $\alpha > 1$ und dem gegebenen Hinweis liegt nur der erstgenannte Pol innerhalb des Einheitskreises. $\boxed{\textbf{2 P.}}$
Es ist dann nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}& -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\alpha z + 1}\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} \cdot \frac{1}{z + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}\,\mathrm{d}z \\ &= -2\mathrm{i}\frac{2\pi\mathrm{i}}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ &= -2\mathrm{i}\frac{2\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \qquad \boxed{\textbf{4 P.}}\end{aligned}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Es ist

$$\mathcal{Z}\left[(n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}\right] = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{Z}\left[(1)_{n\in\mathbb{N}_0}\right]\right) \qquad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Mit

$$\mathcal{Z}\left[(1)_{n\in\mathbb{N}_0}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1} \qquad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

hat man

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[(n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}\right] &= z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{z - 1}\right) \\ &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z - 1)^2} \\ &= -z\frac{-z^2 + 1}{(z - 1)^4} \\ &= \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3} \qquad \boxed{\textbf{4 P.}}\end{aligned}$$

4. Aufgabe

12 Punkte

Das charakteristische Polynom in μ lautet $\mu^2 + 4\mu + (4 + \lambda)$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Die Diskriminante ist $-\lambda$. Damit unterscheiden wir drei Fälle:

- $\lambda < 0$: Diskriminante positiv, zwei reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
$$\mu_1 = -2 + \sqrt{-\lambda}, \qquad \mu_2 = -2 - \sqrt{-\lambda}.$$
Allgemeine Lösung der DGL:
$$y(x) = A\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{-\lambda})x} + B\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{-\lambda})x}.$$
$y(0) = 0$ liefert $B = -A$, und aus
$$y(2\pi) = A\left(\mathrm{e}^{2\pi(-2+\sqrt{-\lambda})} - \mathrm{e}^{2\pi(-2-\sqrt{-\lambda})}\right) = 2A\mathrm{e}^{-4\pi}\sinh\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0$$
folgt nur $A = 0$, da $\lambda \neq 0$. Es ergibt sich $y = 0$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

- $\lambda = 0$: Diskriminante gleich 0, eine doppelte reelle Nullstelle
$$\mu = -2.$$
Allgemeine Lösung der DGL:
$$y(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + Bx\mathrm{e}^{-2x}.$$
$y(0) = 0$ liefert $A = 0$, weiter ist mit
$$y(2\pi) = B \cdot 2\pi\mathrm{e}^{-4\pi} = 0$$
auch $B = 0$. Es ist $y = 0$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

- $\lambda > 0$: Diskriminante negativ, zwei komplex-konjugierte Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\mu_1 = -2 + \mathrm{i}\sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 = -2 - \mathrm{i}\sqrt{\lambda}.$$
Allgemeine Lösung der DGL:
$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left[A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right].$$
$y(0) = 0$ liefert $A = 0$, also ist noch
$$y(2\pi) = B\mathrm{e}^{-4\pi}\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right).$$

bis hierher: $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Es braucht nicht $B = 0$ zu sein, wenn $2\pi\sqrt{\lambda} = k\pi$ mit einer ganzen Zahl k. λ ist also einer der Werte λ_k mit

$$\lambda_k = \frac{k^2}{4} \quad \boxed{\textbf{2 P.}}.$$

Die zum Eigenwert λ_k gehörige Eigenlösung ist dann

$$y_k = \mathrm{e}^{-2x} \sin\left(x\sqrt{\lambda_k}\right) = \mathrm{e}^{-2x} \sin\left(\tfrac{1}{2}kx\right). \quad \boxed{\textbf{2 P.}}.$$