Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2007
Prof. Dr. Ferus 24. Juli 2007

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sind die Kurven

$$C_1 : z_1(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}, \quad s \in [0, \pi],$$
$$C_2 : z_2(t) = \mathrm{i}t, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

und die Funktion f mit $f(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$. Unter welchem Winkel schneiden sich die Bilder $f(C_1)$ und $f(C_2)$?

2. Aufgabe 11 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \frac{z^2}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$$

über den positiv durchlaufenen Kreis K mit $K = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = \frac{3}{2} \}$.

3. Aufgabe 8 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{z^2-4}$ in eine solche Laurentreihe um 1, deren maximaler Konvergenzbereich ein Kreisring ist.

4. Aufgabe 5 Punkte

Gegeben sind die reellen Funktionen

$$y_1(x) = (x-1)^2, \qquad y_2(x) = x^2 - 2.$$

Es gibt genau ein reelles Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass die Randbedingungen

$$\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) = \gamma y_1(b) + \delta y_1'(b) = 0,$$
$$\alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) = \gamma y_2(b) + \delta y_2'(b) = 0$$

mit reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit der Eigenschaft $(\alpha, \beta) \neq (0,0) \neq (\gamma, \delta)$ *überhaupt* erfüllt werden können. Finden Sie das Intervall $[a, b]$.

5. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.

a) Die reelle Funktion $v(x, y) = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist der Imaginärteil einer analytischen Funktion $f(z)$ mit $z = x + \mathrm{i}y$.

b) Es gibt eine Möbiustransformation, die zwei verschiedene, parallele Geraden auf zwei konzentrische Kreise mit endlichen Radien abbildet.

c) Es sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion und K ein Kreis in der komplexen Ebene. Dann gilt: Ist $f(z) = 0$ für alle $z \in K$, so verschwindet f auch im Inneren von K.

d) Wenn das Residuum einer Funktion f an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ verschwindet, d.h. $\mathrm{Res}(f, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.