Musterlösung Verständnisteil — Analysis III f. Ing., 24. Juli 2007

1. Aufgabe

8 Punkte

C_1 ist die obere Hälfte des Einheitskreises, C_2 die obere imaginäre Achse. Die Kurven schneiden sich in $z_0 = \mathrm{i}$, es ist dort $s_0 = \frac{\pi}{2}, t_0 = 1$. Der Schnittwinkel ist nach Anschauung $\frac{\pi}{2}$. Man kann es auch nachrechnen: Mit

$$\begin{aligned} \dot{z}_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \\ \dot{z}_2(1) &= \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \end{aligned}$$

ist die Differenz der Polarwinkel gleich $\pi/2$. **3 P.**

Bevor man mühsam die Bildkurven berechnet, testet man, ob f für $z_0 = \mathrm{i}$ eine konforme Abbildung darstellt. Es ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= 3z_0^2 - 8z_0 + 5 \\ \Longrightarrow \quad f'(\mathrm{i}) &= 2 - 8\mathrm{i}. \end{aligned}$$ **3 P.**

Das ist verschieden von 0, **1 P.**
damit schneiden sich die Bildkurven im selben Winkel, also wiederum senkrecht.
1 P.

Die Nullstellen von f' sind 1 und $\frac{5}{3}$.

2. Aufgabe

11 Punkte

Die Nullstellen des Nenners sind $-1, 1, \mathrm{i}$. **3 P.**

Man nimmt hiervon diejenigen, für die $|z-1| < \frac{3}{2}$ gilt. Also liegen nur 1 und i innerhalb K. (Beachte: $|\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.) **2 P.**

Wir berechnen die Residuen des Integranden bei 1 und bei i, wobei wir $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ benutzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}, 1\right] &= \left.\frac{z^2}{(z+1)(z-\mathrm{i})}\right|_{z=1} = \frac{1}{2(1-\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{4} \\ \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}, \mathrm{i}\right] &= \left.\frac{z^2}{z^2-1}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ **4 P.**

Also ist nach dem Residuensatz

$$\int_K \frac{z^2}{(z^2-1)(z-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{4} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\mathrm{i}\frac{3+\mathrm{i}}{4} = \pi\frac{-1+3\mathrm{i}}{2}.$$

2 P.

3. Aufgabe

8 Punkte

Die vorgegebene Funktion hat als Polstellen die Zahlen 2 und -2. **2 P.**

Damit gibt es drei maximale Konvergenzbereiche: der Kreis $|z-1|<1$, der Kreisring $1<|z-1|<3$ und das unbeschränkte Gebiet $|z-1|>3$. Es ist also die Laurentreihe im Kreisring $1<|z-1|<3$ gesucht. **2 P.**

Partialbruchzerlegung, Umformen nach "$(z-1)$" und Verwendung der Formel für die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)+3}\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z-1}-1}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{z-1}{3}\right)-1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4}(z-1)^{-(n+1)}-\frac{1}{12}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^{n}\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4}(z-1)^{-(n+1)}+\frac{1}{4}(-3)^{-(n+1)}(z-1)^{n}\right]
\end{aligned}$$

4 P.

4. Aufgabe

5 Punkte

Die Funktionen in die Randbedingungen eingesetzt:

$$\begin{aligned}
(a-1)^2\alpha+2(a-1)\beta = (b-1)^2\gamma+2(b-1)\delta &= 0,\\
(a^2-2)\alpha+2a\beta = (b^2-2)\gamma+2b\delta &= 0
\end{aligned}$$

2 P.

Das sind zwei homogene lineare Gleichungssysteme: eins in α,β und eins in γ,δ. Damit etwas anderes als $\alpha=\beta=0$ und $\gamma=\delta=0$ herauskommen kann, müssen die Determinanten gleich Null sein:

$$2a(a-1)^2-2(a-1)(a^2-2)=0,\qquad 2b(b-1)^2-2(b-1)(b^2-2)=0.$$

Nach Ausklammern eines Linearfaktors hat man

$(a-1)[a(a-1)-a^2+2]=(a-1)(2-a)=0,$ entsprechend $(b-1)(2-b)=0.$ **2 P.**

Mit $a<b$ haben wir also $a=1, b=2$. Das gesuchte Intervall ist $[1,2]$ **1 P.**

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.
Dazu müsste v harmonisch sein. Es ist aber $\Delta v = 4 \neq 0$.

b) Falsch.
Zwei verschiedene, parallele Geraden schneiden sich in ∞. Die konzentrischen Kreise müssten sich also im Bild von ∞ schneiden, damit wären sie aber sogar identisch und können erst recht nicht Bilder verschiedener Geraden sein.

c) Wahr.
Die Integralformel von Cauchy erlaubt es, aus Randwerten auf Werte im Inneren eines Gebiets zu schließen: Liegt z_0 im Inneren von K, so ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{(K)} \frac{0}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = 0.$$

d) Falsch.
Ein Gegenbeispiel: $f(z) = z^{-2}$.