

Mai-Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

4 Punkte

Von einer analytischen Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, seien der Realteil durch

$$\operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y) = -3y^2x + x^3 + x, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

und die Eigenschaft $f(0) = 0$ gegeben.

Bestimmen Sie $f(z)$ mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

2. Aufgabe

4 Punkte

Finden Sie eine Möbius Transformation $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die den Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

auf eine Gerade abbildet mit $z_0 = 0$ als einzigem Fixpunkt.

3. Aufgabe

8 Punkte

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^4$ und G die offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 definiert durch

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < -y\}.$$

Für eine reelle Funktion $u : \bar{G} := G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ werde folgende Randwertaufgabe gestellt:

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in G \\ u(0, y) = -2y^4 + 1, \quad u(-y, y) = 8y^4 + 1 & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Wir arbeiten mit der Methode der Verpflanzung, indem wir die Abbildung f verwenden:

1. Skizzieren Sie die Gebiete G und $H := f(G)$.
2. Schreiben Sie das Randwertproblem (P_1) , welches für die Funktion u auf G formuliert ist, in ein Randwertproblem (P_2) für eine Funktion v , die auf H definiert ist, um.
3. Zeigen Sie, dass $v : (x, y) \mapsto -2x + 1$ eine Lösung des Problems (P_2) ist.
4. Finden Sie eine Lösung des Problems (P_1) .

4. Aufgabe

4 Punkte

Berechnen Sie $\int_{C_i} z^2 dz$, $i = 1, 2$, dabei ist

1. C_1 die gerichtete Strecke von A zu B und
2. C_2 der positive durchlaufende Kreisbogen mit dem Radius 1 um den Ursprung, der B mit A verbindet (Sehen Sie die Skizze).

