Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik

6 Oktober 2009

Oktober-Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Keine Taschenrechner und Aufzeichnungen zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

(i) Es ist
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sin x \sinh y - \sin x \sinh y = 0.$$
Daher ist die Funktion v harmonisch $\Rightarrow v$ ist der Imeginärteil einer analytischer Funktion f.

(ii) Der Reelteil u der Funktion f erfüllt die Cauchy-Riemannsche DGL:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y$$
und
$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y$$
d.h $u(x,y) = \cos x \cosh y + F(y)$ und $-\cos x \sinh y - F'(y) = -\cos x \sinh y \Rightarrow F(y) = c \in \mathbb{R}$.

Aus der Bedingung $f(0) = 1$ folgt: $u(0,0) + iv(0,0) = \cos 0 \cosh 0 + c = 1$ d.h $c = 0$.

Damit ist $u(x,y) = \cos x \cosh y$ und
$$f(x+iy) = \cos x \cosh y + i(-\sin x \sinh y).$$

2. Aufgabe 8 Punkte

(i) $z_1 = 0$ und $z_2 = \pi$ sind die Singularitäten der Funktion f.

Da $z \mapsto (z-\pi)f(z)$ analytisch in z_2 ist, ist z_2 ein Pol 1. Ordnung.

Es ist $\lim\limits_{z\longrightarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0-\pi} = \frac{-1}{2\pi} < \infty \,|Rightarrow\, z_1$ eine hebbare Singularität.

(ii) Es gilt:
$$\text{Res}(f(z),0) = 0 \text{ und } \text{Res}(f(z),\pi) = \frac{\cos\pi - 1}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Es ist
$$\int_0^{2\pi} \frac{3+2\cos t}{5-4\sin t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{3+e^{it}+e^{-it}}{5+2i(e^{it}-e^{-it})}\,dt.$$
Mit der Substitution $z = e^{it} \Rightarrow dz = iz\,dt$ erhalten wir:
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tfrac{3+2\cos t}{5-4\sin t}\,dt &= \int_{K(0,1)} \tfrac{3+(z+z^{-1})}{iz(5+2i(z-z^{-1}))}\,dz \\
&= \int_{K(0,1)} \tfrac{z^2+3z+1}{-2z(z-2i)(z-\frac{1}{2}i)}\,dz \\
&= 2\pi i\Big[\text{ Res}\Big(\tfrac{z^2+3z+1}{-2z(z-2i)(z-\frac{1}{2}i)},0\Big) + \text{ Res}\Big(\tfrac{z^2+3z+1}{-2z(z-2i)(z-\frac{1}{2}i)},\tfrac{1}{2}i\Big)\Big] \\
&= 2\pi i\Big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{-1}{2}-i\Big) = 2\pi.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe 14 Punkte

(i) In G_1 ist $|z^2| < 1$ und $f(z) = \frac{-1}{z^3} \cdot \frac{1}{(1-z^2)} = -\frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-3}$.

In G_2 gilt:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k-5}.$$

(ii) Die inverse Z-transformierte der Funktion f ist die Folge $(y_k)_k$ definiert durch $y_k = 1$ für $k = 2l + 5$ und $y_k = 0$ für $k \neq 2l + k, \quad l \in \mathbb{N}$.