Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik 6 Oktober 2009

Oktober-Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es ist

$$\begin{cases} x' &= 0 \\ y' &= 0 \\ z' &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(a-1+z) = 0 \\ z = -x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{oder} \begin{cases} y = x \\ x^2 = a-1 \\ z = 1-a. \end{cases}$$

Daher ist $(0,0,0)$ der einzige GGP für $a < 1$.

Für $a \geq 1$ die GGPkte sind $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}, 1-a)$ und $(-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}, 1-a)$.

(ii) Es ist

$$< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) >= 4x(y-x)+4y(-x-y+xz)-4z(z+xy) = -4(x^2+y^2+z^2).$$

Die Funktion V besitzt ein striktes Minimum bei $(0,0,0)$ und es gilt $< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) >\leq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow V$ ist eine Lyapunov Funktion des Systems

$\Rightarrow$ das System ist stabil im Punkt $(0,0,0)$.

Da $< \text{grad}_{(x,y,0)} V, \vec{F}(x,y,z) >= 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ ist der GGP Punkt $(0,0,0)$ asymptotisch stabil.

2. Aufgabe

9 Punkte

Es ist $0 \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx < +\infty$.

Da die Funktion f gerade ist gilt:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Weiterhin ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Wir integrieren entlang der positiv orientierten Kurve $K^+(0,R) = \partial D^+(0,R)$ mit $D^+(0,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Die Funktion f hat vier Polstellen: $z_1 := ai$, $z_2 := -ai$, $z_3 = bi$ und $z_4 = -bi$ mit $z_1, z_3 \in D^+(0,R)$ und $z_2, z_4 \notin D^+(0,R)$.

Nach dem Residuensatz gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \oint_{K^+(0,R)} f(x)\,dz = 2\pi i(\text{ Res}(f(x),z_1) + \text{ Res}(f(x),z_3)) &= 2\pi i\Big(\tfrac{1}{2ai(b^2-a^2)} + \tfrac{1}{2bi(a^2-b^2)}\Big) \\ &= \tfrac{\pi}{ab(b+a)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{ab(b+a)} - \lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz.$$

Da Grad$(z^2+a^2)(z^2+b^2) = 4 \geq 0+2 =$Grad$(1)+2$, ist $\lim\limits_{R\to+\infty} \oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz = 0.$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{ab(b+a)} \text{ und } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(b+a)}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Sei C_1 die Strecke von $z_1 := -1-i$ bis $z_2 := 1-i$.

Die Kurve $C_1 \cup C$ ist eine positiv orientierte geschlossene Kurve.

Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z(z-3)}$ ist nicht analytisch in $I_{C_1\cup C}$ und hat eine Polstelle 1. Ordnung im Punkt $z_0 := 0 \in I_{C_1\cup C}$.

Nach dem Residuensatz gilt:

$$\oint\limits_{C_1} \frac{dz}{z(z-3)} + \int_C \frac{dz}{z(z-3)} = 2i\pi \text{ Res}\Big(\frac{1}{z(z-3)}, 0\Big) = 2i\pi \cdot \frac{-1}{3} = \frac{-2i\pi}{3}.$$

Daher ist

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z(z-3)} = \frac{-2i\pi}{3} - \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{z(z-3)}.$$

Wir parametrisieren C_1 wie folgt: $C_1 : t \mapsto t-1-i,\;\; t \in [0,2]$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{C_1} \tfrac{dz}{z(z-3)} &= \oint\limits_{C_1} \tfrac{dz}{3(z-3)} - \oint\limits_{C_1} \tfrac{dz}{3z} \\
&= \tfrac{1}{3}\int_0^2 \tfrac{dt}{t-4-i} - \tfrac{1}{3}\int_0^2 \tfrac{dt}{(t-1-i)} \\
&= \tfrac{1}{3}\int_{-4}^{-2} \tfrac{t+i}{t^2+1}\,dt - \tfrac{1}{3}\int_{-1}^{1} \tfrac{t+i}{(t^2+1)}\,dt \\
&= \tfrac{1}{6}\ln(\tfrac{5}{9}) + \tfrac{1}{3}i\big[\arctan(4) - \arctan(2) - \tfrac{\pi}{2}\big].
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z(z-3)} = \frac{-2i\pi}{3} - \frac{1}{6}\ln(\frac{5}{9}) - \frac{1}{3}i\big[\arctan(4) - \arctan(2) - \frac{\pi}{2}\big] = \frac{-i\pi}{3} - \frac{1}{6}\ln(\frac{5}{9}) - \frac{1}{3}i\big[\arctan(4) - \arctan(2)\big].$$

4. Aufgabe

11 Punkte

(i) $T : z \mapsto T(z) := \frac{1}{z-i}$ erfüllt die drei Bedingungen.

$w = T(z)$ ist eindeutig gegeben weil eine Möbius-Transformation durch die Bilder drei Punkte komplet definiert ist.

(ii)

$$w = T(z) \Leftrightarrow w = \frac{1}{z-i} \Leftrightarrow w(z-i) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{wi+1}{w} := T^{-1}(w).$$

(iii) Es ist $T(i) = \infty \Rightarrow T(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade die durch $-i = T(2i)$ und $0 = T(\infty)$ läuft. D.h $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

Es ist $\infty = T(i) \notin T(\mathbb{R}) \Rightarrow T(\mathbb{R})$ ist ein Echtkreis der $T(i\mathbb{R})$ senkrecht im Punkt $i = T(0)$ schneidet und durch $0 = T(\infty)$ durchläuft. D.h $T(\mathbb{R})$ ist der Kreis um $\frac{1}{2}i$ mit Radius $\frac{1}{2}$.

Wir müssen die Bilder der Randpunkte zuerst bestimmen:

Durch T wird $\mathbb{R}_+$ auf den rechthalbkreis um $\frac{1}{2}i$ mit Radius $\frac{1}{2}$ abgebildet.

Weiterhin ist $T(i\mathbb{R}_+) = \{iy,\, y \leq 1\}$. Daher ist

$$T(G_1) := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}i| < \frac{1}{2} \text{ und } \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$$