Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2009

17.july 2009

Juli-Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 7 Punkte

Für der Imaginärteil der Funktion f muss gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

d.h

$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y-1 \Rightarrow v(x,y) = y^2-y+F(x)$ und $-F'(x) = 2x-1 \Rightarrow F(x) = x^2-x+c,\ c \in \mathbb{R}$.

$f(i) = 1 \Rightarrow c = 0$. Die gesuchte Funktion ist dann

$$f(x) = 2xy - x + y + i(y^2 - y + x^2 - x).$$

2. Aufgabe 8 Punkte

Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ die gesuchte Funktion. 0 ist der einzige Fixpunkt der Funktion T $\Rightarrow$ 0 ist die einzige Lösung der Gleichung $T(z) = z \Rightarrow z(cz + d - a)$ besitzt keine andere Lösung ausser $0 \Rightarrow d = a$. Mit $T(1) = \infty$ gilt dann $c = -a$. Damit ist

$$T(z) = \frac{z}{-z+1}.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

1. Es sei $\alpha > 1$. Es ist $-\sqrt{\alpha^2-1} < 0 < \alpha - 1$ und $(\alpha-1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 - \alpha < \alpha^2 - 1$. Daraus folgt:

$$-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1} < -1 < -\alpha + \sqrt{\alpha^2-1} < 0.$$

2. Sei $z = e^{i\varphi}$. Es ist $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ und $d\varphi = -i\frac{dz}{z}$. Daraus folgt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \cos\varphi}\, d\varphi = -i \int_{K(0,1)} \frac{2dz}{2\alpha z + z^2 + 1} = -i \int_{K(0,1)} \frac{2dz}{(z+\alpha)^2 - (\alpha-1)}.$$

Dieses Integral kann man mit dem Residuensatz lösen. Die Pole des Integranden liegen bei $-\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}$ und bei $-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$. Nur der erstgenannte Pol liegt innerhalb des Einheitskreises. Daher ist

$$\begin{aligned} -i \int_{K(0,1)} \tfrac{2dz}{(z+\alpha)^2-(\alpha-1)} &= -i2\pi i \operatorname{Res}\left(\tfrac{2}{(z+\alpha)^2-(\alpha-1)}, -\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right) \\ &= \tfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Die Funktion $f : z \mapsto z^3 - z + 1$ ist analytisch. Daher ist $\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{c_2} f(z)\, dz$.

5. Aufgabe

7 Punkte

Es ist $F(s) = \frac{(s+1)(s^2-1)}{s^4-1} = \frac{(s+1)^2(s-1)}{(s+i)(s-i)(s+1)(s-1)} = \frac{s+1}{(s-i)(s+i)}$. Damit ist die inverse Laplacetransformierte der Funktion F durch

$$\mathcal{L}(F)(t) = \operatorname{Res}(\frac{e^{st}(s+1)}{(s-i)(s+i)}, i) + \operatorname{Res}(\frac{e^{st}(s+1)}{(s-i)(s+i)}, -i) = \cos t + \sin t$$

definiert.