Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2009

17-07-2009

Juli-Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

a) $f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$, $z_0 = i$, Es ist $f(z) = \frac{(z+i)(z^2-iz+2))}{(z+i)(z-i)} = \frac{(z^2-iz+2))}{(z-i)}$. Daher ist $z = -i$ eine hebbare Singularität und $-i$ ein Pol 1.Ordnung der Funktion f.

Weiterhin es gilt: $\mathrm{Res}(f(z), i) = 2$ und $\mathrm{Res}(f(z), -i) = 0$

b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$, $z_0 = 0$.

Es ist $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}$. Damit ist $\cos(z) - 1 = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...$ und

$$f(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4} + \frac{z^2}{4!} + ...$$

Daher ist $z_0 = 0$ ein Pol 2. Ordnung der Funktion f und $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = 0$.

2. Aufgabe 10 Punkte

Sehen Sie die Lösung des Übungsblatt 13. Da $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$, ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$.

3. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $T(2) = \frac{1}{2}$, $T(0) = \infty$ und $T(1+i) = \frac{1}{2}(1-i)$. Das Bild des Kreises ist entwieder ein Echt Kreis oder eine Gerade. Da, $T(0) = \infty$ ist das Bild des Kreises $|z-1| = 1$ eine Gerade die durch $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}(1-i)$ läuft d.h die Gerade $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}$.

4. Aufgabe 7 Punkte

Es ist

$$f(z) = z + 1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Der Hauptteil der Laurentreihe ist $\frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$ und der Nebenteil ist $z + 1$. $z_0 = 0$ ist ein Pol 2. Ordnung und $\mathrm{Res}(f(z), 0) = 3$.

5. Aufgabe 8 Punkte

Es ist $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = 1$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{i}{n}) = -1 \neq 1$. Daher hat f kein Grenzwert in $0 \Rightarrow 0$ ist keine hebbare Singularität. Da $\lim\limits_{z\to 0} \neq \infty$ ist z_0 keine Polstelle auch $\Rightarrow$ 0 ist eine wesentliche Singularität.