# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** SS 10
**A. Gündel-v. Hofe** 31. Juli 2010

## Juli – Klausur (Rechenteil)
## Analysis III für Ingenieure

Name: ............................ Vorname: ............................

Matr.–Nr.: ......................... Studiengang: .........................

---

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe 12 Punkte

Ermitteln Sie in der kompaktifizierten komplexen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Möbiustransformation $T$, bei der die Punkte 0 und 1 Fixpunkte sind und die den Punkt $-1$ auf $\infty$ abbildet.
Auf welchen Bereich wird unter $T$ der Bereich $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0\}$ abgebildet?

## 2. Aufgabe 10 Punkte

Für $R \in \mathbb{R}^+$ und $R > 1$ sei mit $K^+(R) : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ein gegen den Uhrzeigersinn durchlaufener Halbkreis bezeichnet.

Die beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig und bringen jeweils die angegebenen Punkte.

a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K^+(R)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2} \,\mathrm{d}z = 0. \tag{$*$}$$

b) (5 Punkte) Berechnen Sie unter der Voraussetzung der Aussage $(*)$ das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

**Hinweis:** Verwenden Sie die für $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $|\alpha| \neq |\beta|$ gültigen Ungleichungen

$$\mathrm{e}^{-x} \leq 1, \qquad \frac{1}{|\alpha + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|} \leq \frac{1}{|\,|\alpha| - |\beta|\,|}.$$

## 3. Aufgabe 8 Punkte

Berechnen Sie die $\mathcal{Z}$-Transformierte der Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in geschlossener Form.

## 4. Aufgabe 10 Punkte

Finden Sie eine harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{gathered} \Delta u = 0 \quad \text{für } y > 0 \text{ und } x^2 + (y-5)^2 > 16, \\ u(x,y) = 0 \quad \text{für } y = 0, \\ u(x,y) = 1 \quad \text{für } x^2 + (y-5)^2 = 16, \end{gathered}$$

indem Sie als Ansatzfunktionen die Funktionen 1 und $\ln(x^2 + y^2)$ sowie die Angabe verwenden, dass die komplexe Funktion $f$ mit $f(z) = \mathrm{i}\frac{z+3\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}}$ erstens die reelle Achse auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ und zweitens den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 5\mathrm{i}| = 4\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\}$ abbildet.