Musterlösung Rechenteil — Analysis III f. Ing., 31. Juli 2010

1. Aufgabe

12 Punkte

Für

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

sind $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zu suchen, so dass T die gewünschten Eigenschaften hat.

$T(0) = 0$ ergibt $\frac{b}{d} = 0$, also $b = 0$.

$T(1) = 1$ ergibt $ac + d = 1$, also $a = c + d$, also $d = a - c$

Bis jetzt hat man

$$T(z) = \frac{az}{cz + a - c}.$$

Wegen $T(-1) = \infty$ ist -1 die Nullstelle des Nenners. Damit ist $a - 2c = 0$, also $c = \frac{a}{2}$.

Es ist

$$T(z) = \frac{az}{\frac{a}{2}z + \frac{a}{2}} = \frac{2z}{z+1}$$

(Mit $a = \mathrm{i}\sqrt{2}$ erreicht man Determinante 1.)

Der angegebene Bereich ist die obere Hälfte der in 0 zentrierten Einheitskreisscheibe.

Die Randkurve besteht aus dem oberen Halbkreis und der Strecke von -1 nach 1. Der Halbkreis werde von 1 über i nach -1 durchlaufen, die Strecke anschließend von -1 über 0 nach 1. Die Halbkreisscheibe liegt dann zur Linken.

Es ist $T(1) = 1$, $T(\mathrm{i}) = \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1} = \frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i}$, $T(-1) = \infty$, $T(0) = 0$ und wieder $T(1) = 1$.
Wegen $T(-1) = \infty$ ist das Bild des Halbkreises eine Halbgerade, die bei 1 beginnt und durch $1 + \mathrm{i}$ geht, also in der oberen Halbebene liegt.
Das Bild der Strecke $[-1, 1]$ geht in die Halbgerade $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \leq 1 \text{ und } \mathrm{Im}\, z = 0\}$ über, die auf der reellen Achse liegt.

Das Bild der oberen Halbkreisscheibe ist also
die „Viertelebene“ $\{z \mid \mathrm{Re}\, z \leq 1 \text{ und } \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.

2. Aufgabe

10 Punkte

a) (5 Punkte) Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{R\to\infty}\int_{K^+(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right| \\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \left|\frac{\mathrm{e}^{-R\sin\varphi+\mathrm{i}R\cos\varphi}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty} R\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-R\sin\varphi}}{|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}|}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty} R\int_0^\pi \frac{1}{R^2-1}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^2-1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K^+(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

b) (5 Punkte) Der Integrand hat bei i und −i Pole 1. Ordnung.
Davon liegt nur i im Gebiet $\mathcal{B}(R)$ mit $R > 1$, das von $K^+(R)$ und dem Stück $[-R, R]$ der reellen Achse eingeschlossen wird.

Es ist

$$\int_{\mathcal{B}(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2},\mathrm{i}\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2z}\right)\Big|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{-1}.$$

Dann ist mit der Aussage (∗) über den Halbkreis $K^+(R)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{B}(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{e}^{-1}.$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[(-1)^n n](z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(-z)^{-n} \\
&= (-z)\sum_{n=0}^{\infty} n(-z)^{-n-1} \\
&= z\sum_{n=0}^{\infty}(-n)(-z)^{-n-1} \\
&= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{-n} \\
&= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1+z^{-1}} \\
&= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{1+z} \\
&= -z\cdot\frac{1\cdot(1+z)-z\cdot 1}{(1+z)^2} \\
&= -z\cdot\frac{1}{(1+z)^2} \\
&= -\frac{z}{(1+z)^2}.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

In der komplexen Ebene entspricht das Originalgebiet der oberen Halbebene, aus welcher der Kreis mit Mittelpunkt 5i und Radius 4 entfernt wurde.

Die angegebene Möbiustransformation heiße f. f bildet das Originalgebiet auf den Kreisring mit Innenradius 1 und Außenradius 2 ab.

Der innere Kreis ($r = 1$) ist das Bild der reellen Achse ($y = 0$). Der äußere Kreis ($R = 2$) ist das Bild des in 5i zentrierten Kreises mit Radius 4.

Die harmonische Funktion $\tilde{u}$ soll für $r = 1$ den Wert 0, für $r = 2$ den Wert 1 annehmen.

Der Ansatz ist

$$\tilde{u}(x, y) = A + B \ln(x^2 + y^2).$$

A, B sind bestimmt durch

$$\tilde{u}(r = 1) = A \stackrel{!}{=} 0, \qquad \tilde{u}(r = 2) = A + B \ln 4 \stackrel{!}{=} 1,$$

also

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\ln 4} \ln(x^2 + y^2)$$

Die Lösung u des Originalproblems ist gegeben durch

$$u(x, y) = \tilde{u}(\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y), \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y)),$$

also

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{\ln 4} \ln \left((\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y))^2 + (\operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y))^2 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 4} \ln \left| \mathrm{i} \frac{z + 3\mathrm{i}}{z - 3\mathrm{i}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{|z + 3\mathrm{i}|^2}{|z - 3\mathrm{i}|^2} \\
&= \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{|x + (y + 3)\mathrm{i}|^2}{|x + (y - 3)\mathrm{i}|^2} \\
&= \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{x^2 + (y + 3)^2}{x^2 + (y - 3)^2}
\end{aligned}$$