**Musterlösung Verständnisteil — Analysis III f. Ing., 7. April 2010**

## 1. Aufgabe

8 Punkte

a) Ableitung mit Ketten- und Quotientenregel

$$\arctan' z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z} \cdot \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}z)-(1+\mathrm{i}z)(-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i}z)^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{i}z} \cdot \frac{\mathrm{i}+z+\mathrm{i}-z}{1-\mathrm{i}z}$$
$$= \frac{1}{(1+\mathrm{i}z)(1-\mathrm{i}z)} = \frac{1}{1-(\mathrm{i}z)^2} = \frac{1}{1+z^2}$$

b) Der Term $\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$, der im Logarithmus steht, darf weder verschwinden noch negativ-reell sein.

Mit $\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \frac{1-t}{1+t}$ ist er reell. Für $t = 1$ verschwindet er, und sowohl für $t > 1$ als auch für $t < 1$ ist er negativ.

Der Term $\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ beschreibt eine Möbiustransformation und insbesondere eine injektive Abbildung, somit sind es *genau* diese Stellen $\mathrm{i}t$, für welche arctan nicht definiert ist.

c) Der komplexe Arcustangens ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \neq 0$ oder $-1 < \operatorname{Im} z < 1$ erklärt. Das gesuchte Gebiet darf diese Stellen nicht enthalten (nicht nur nicht die Polstellen $\pm\mathrm{i}$).
Einfache Vorschläge sind:

- offene linke Halbebene ($\operatorname{Re} z < 0$);
- offene rechte Halbebene ($\operatorname{Re} z > 0$);
- offener Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$

## 2. Aufgabe

6 Punkte

Es handelt sich um zwei Kreisringe, die ineinander gefügt sind: Das von $G_1$ umschlossene offene Innengebiet liegt ganz im Kreisring $G_2$, das von $G_2$ umschlossene offene Innengebiet liegt ganz im Kreisring $G_1$.

Da die Konvergenzgebiete maximal sind, muss auf jedem der vier Kreise (beide Innenkreise und beide Außenkreise) mindestens eine Polstelle liegen.

Weil $f$ nur zwei Polstellen hat, liegt jede Polstelle auf zwei Kreisen zugleich.

Die auftretenden Schnittpunkte sind 2, 4, 6, $4 + \mathrm{i}\sqrt{8}$ und $4 - \mathrm{i}\sqrt{8}$.

Folgende Antworten sind richtig:

- $\{\alpha, \beta\} = \{2, 6\}$
- $\{\alpha, \beta\} = \{4, 4 + \mathrm{i}\sqrt{8}\}$
- $\{\alpha, \beta\} = \{4, 4 - \mathrm{i}\sqrt{8}\}$

## 3. Aufgabe

8 Punkte

Die Nullstellen des Nenners sind $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$, allesamt einfach.
Innerhalb des Kreises $|z - 2\mathrm{i}| = \frac{5}{2}$ liegen $1, \mathrm{i}, -1$.
Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{|z-2\mathrm{i}|=\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{1-z^4}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{z=1,\mathrm{i},-1} \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{1-z^4}, z\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \sum_{z=1,\mathrm{i},-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{-4z^3} \\
&= -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i} \sum_{z=1,\mathrm{i},-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^3} \\
&= -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi}.
\end{aligned}$$

## 4. Aufgabe

10 Punkte

Gleichgewichtspunkte $(x^*, y^*)$ erfüllen das Gleichungssystem

$$(x^* - 1)(y^* - 3) = 0,$$
$$(x^* - 2)(y^* - 2) = 0.$$

Mit etwas „Kombinatorik“ ergeben sich $(1, 2)$ und $(2, 3)$ als die beiden Lösungen für $(x^*, y^*)$.

Die Jacobi-Matrix lautet allgemein

$$\begin{pmatrix} y-3 & x-1 \\ y-2 & x-2 \end{pmatrix}.$$

Beim GGP $(1, 2)$ ergibt sich die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

welche als Diagonalmatrix den (doppelten) Eigenwert $-1$ hat. Da er negativen Realteil hat, ist $(1, 2)$ asymptotisch stabil.

Beim GGP $(2, 3)$ hat die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1$ und damit die (einfachen) Eigenwerte 1 und $-1$. Einer von ihnen hat positiven Realteil, damit ist $(2, 3)$ instabil.

## 5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.

$z^2$ ist in 0 nicht konform.

b) Falsch.

z.B. $z_0 = 0$ und $f(z) = z^{-2}$.

c) Wahr.

$\mathcal{Z}[(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](1) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k$.

d) Wahr.

Beschreibt man das System durch $Ax + b = \dot{x}$, so ist $A$ invertierbar und $-A^{-1}b$ der Gleichgewichtspunkt, auf den alle Lösungen $x(t)$ zulaufen.