Musterlösung Rechenteil — Analysis III f. Ing., 16. Oktober 2010

1. Aufgabe

10 Punkte

Zunächst eine Partialbruchzerlegung (Zuhaltemethode):

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

Laurentreihe im Kreisring:

$$-\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \left(-z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{k}\right) = -\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{k}\right)$$

Laurentreihe im Außengebiet:

$$-\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= \left(-z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\right) + \left(2z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k} z^{-k}\right)$$

$$= \left(-\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k} z^{-k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k - 1) z^{-k}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

a) (5 Punkte) Es ist

$$
\begin{aligned}
\left|\lim_{R\to\infty}\int_{K^+(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3+\mathrm{i}a^3}\,\mathrm{d}z\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-R(\sin\varphi-\mathrm{i}\cos\varphi)}}{R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{i}a^3}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right| \\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \left|\frac{\mathrm{e}^{-R(\sin\varphi-\mathrm{i}\cos\varphi)}}{R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{i}a^3}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty} R\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-R\sin\varphi}}{|R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{i}a^3|}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty} R\int_0^\pi \frac{1}{R^3-a^3}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^3-a^3} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

also

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K^+(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3+\mathrm{i}a^3}\,\mathrm{d}z = 0.$$

b) (5 Punkte) Der Integrand hat bei $\mathrm{i}a$, $\frac{a}{2}\sqrt{3}-\mathrm{i}\frac{a}{2}$ und $-\frac{a}{2}\sqrt{3}-\mathrm{i}\frac{a}{2}$ jeweils einen Pol 1. Ordnung.
Davon liegt nur $\mathrm{i}a$ im Gebiet $\mathcal{B}(R)$ mit $R>a$, das von $K^+(R)$ und dem Stück $[-R,R]$ der reellen Achse eingeschlossen wird.

Es ist

$$\int_{\mathcal{B}(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3+\mathrm{i}a^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3+\mathrm{i}a^3},\mathrm{i}a\right)$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\frac{a}{2}\sqrt{3}+\mathrm{i}\frac{a}{2})(z+\frac{a}{2}\sqrt{3}+\mathrm{i}\frac{a}{2})}\right)\Bigg|_{z=\mathrm{i}a} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-a}}{(-\frac{a}{2}\sqrt{3}+\mathrm{i}\frac{3a}{2})(\frac{a}{2}\sqrt{3}+\mathrm{i}\frac{3a}{2})}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-a}}{-\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}} = -\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}}{3a^2}$$

Dann ist mit der Aussage $(*)$ über den Halbkreis $K^+(R)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^3+\mathrm{i}a^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{B}(R)}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}}{3a^2}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Mit $\big((1+(-1)^n)n\big)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0,0,4,0,8,0,12,0,\ldots)$. ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\big((1+(-1)^n)n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} 4kz^{-2k} \\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty} k(z^2)^{-k} \\
&= -4z^2\sum_{k=0}^{\infty}(-k)(z^2)^{-k-1} \\
&= -4z^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\sum_{k=0}^{\infty} w^{-k}\right]_{w=z^2} \\
&= -4z^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{w}{w-1}\right]_{w=z^2} \\
&= -4z^2\left[\frac{(w-1)-w}{(w-1)^2}\right]_{w=z^2} \\
&= 4z^2\left[\frac{1}{(w-1)^2}\right]_{w=z^2} \\
&= \frac{4z^2}{(z^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Ingredienzien für andere Rechnungen:

$$\begin{gathered}
\mathcal{Z}[(1)_{n\in\mathbb{N}_0}] = \frac{z}{z-1}, \qquad \mathcal{Z}[((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = \frac{z}{z+1}, \\
\mathcal{Z}[(n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{Z}[(1)_{n\in\mathbb{N}_0}] = \frac{z}{(z-1)^2}, \\
\mathcal{Z}[((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{Z}[((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = -\frac{z}{(z+1)^2}.
\end{gathered}$$

Also hat man

$$\mathcal{Z}[((1+(-1)^n)n)_{n\in\mathbb{N}_0}] = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z+1)^2} = \frac{z(z+1)^2 - z(z-1)^2}{\big((z-1)(z+1)\big)^2} = \frac{4z^2}{(z^2-1)^2}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

In der komplexen Ebene entspricht das Originalgebiet der oberen Halbebene, aus welcher der Kreis mit Mittelpunkt 10i und Radius 6 entfernt wurde.

Die angegebene Möbiustransformation heiße f. f bildet das Originalgebiet auf den Kreisring mit Innenradius 1 und Außenradius 3 ab.

Der innere Kreis ($r = 1$) ist das Bild der reellen Achse ($y = 0$). Der äußere Kreis ($R = 3$) ist das Bild des in 10i zentrierten Kreises mit Radius 6.

Die harmonische Funktion $\tilde{u}$ soll für $r = 1$ den Wert 0, für $r = 3$ den Wert 1 annehmen.

Der Ansatz ist

$$\tilde{u}(x, y) = A + B \ln(x^2 + y^2).$$

A, B sind bestimmt durch

$$\tilde{u}(r = 1) = A \stackrel{!}{=} 0, \qquad \tilde{u}(r = 3) = A + B \ln 9 \stackrel{!}{=} 1,$$

also

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\ln 9} \ln(x^2 + y^2)$$

Die Lösung u des Originalproblems ist gegeben durch

$$u(x, y) = \tilde{u}(\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y), \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y)),$$

also

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{\ln 9} \ln \left((\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y))^2 + (\operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y))^2 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 9} \ln \left| \mathrm{i} \frac{z + 8\mathrm{i}}{z - 8\mathrm{i}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{|z + 8\mathrm{i}|^2}{|z - 8\mathrm{i}|^2} \\
&= \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{|x + (y + 8)\mathrm{i}|^2}{|x + (y - 8)\mathrm{i}|^2} \\
&= \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{x^2 + (y + 8)^2}{x^2 + (y - 8)^2}
\end{aligned}$$