Musterlösung Verständnisteil — Analysis III f. Ing., 16. Oktober 2010

1. Aufgabe

8 Punkte

Der Rand der Halbebene ist die Gerade g mit $g(t) = (1 + \mathrm{i})t, t \in \mathbb{R}$.

Zu ihr gehören die beiden Fixpunkte und der Punkt ∞.

Die entsprechenden *Bild*punkte $-1 - \mathrm{i}$, $1 + \mathrm{i}$ und $\mathrm{i}\sqrt{2}$ haben den Betrag $\sqrt{2}$ und liegen damit auf einem Kreis K, der 0 als Mittelpunkt und den Radius $\sqrt{2}$ hat. K ist also das Bild von g.

Wird die Gerade g von unten nach oben durchlaufen, so ist die Halbebene H das Gebiet zur Linken.

Es werden die Punkte $-1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, \infty$ in dieser Reihenfolge durchlaufen, dementsprechend auf K die Bildpunkte $-1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}, \mathrm{i}\sqrt{2}$. Der Kreis K wird im positiven Drehsinn durchlaufen.

Damit ergibt sich als Antwort:

$$T(H) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \sqrt{2}\}.$$

oder

Das Bild von H ist das Innengebiet des Kreises
mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{2}$.

$T(z) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}z+2\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

2. Aufgabe 7 Punkte

Die Strecke $\mathcal{C}$ schneidet die negative reelle Achse.

Folgende Lösungen sind möglich:

α) Für den Integranden $\frac{1}{z}$ ist $\ln(-z)$ eine Stammfunktion, die auf $\mathbb{C}$ ohne die nicht-negative reelle Achse definiert ist. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(-(-1+\mathrm{i})) - \ln(-(-1-\mathrm{i}))$$
$$= \ln(1-\mathrm{i}) - \ln(1+\mathrm{i}) = \left(\ln 2 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) - \left(\ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$$

β) Mit der Definition des Kurvenintegrals ist

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \frac{1}{-1+\mathrm{i}t}\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{-1}^{1} \frac{-1-\mathrm{i}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\mathrm{i}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{i}\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{i}dt$$
$$= -2\mathrm{i}\left[\arctan t\right]_0^1 = -2\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$$

γ) Man vereinigt die Strecke $\mathcal{C}$ mit einer Kurve $\mathcal{C}'$, die die negative reelle Achse nicht schneidet und von $-1+\mathrm{i}$ nach $-1-\mathrm{i}$ führt, so dass die Vereinigung $\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$ eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve darstellt, die im negativen Drehsinn durchlaufen wird und die Zahl 0 einschließt. Dann ist nach der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}.$$

Das Integral über $\mathcal{C}'$ berechnet sich mit der Stammfunktion $\ln z$:

$$\int_{\mathcal{C}'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(-1-\mathrm{i}) - \ln(-1+\mathrm{i}) = (\ln 2 - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}) - (\ln 2 + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4})] = -\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}.$$

Also ist

$$\int_{\mathcal{C}'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{C}'} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} - \left(-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Die Nullstellen des Nenners sind 0, 1, und 3.
Innerhalb des Kreises $|z| = 2$ liegen hiervon die Nullstellen 0 und 1.

Für die Residuen hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)}, 0\right) &= \lim_{z\to 0} z\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)} = \mathrm{i}\pi\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)}, 1\right) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)} = (-2)\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für die Polstelle 0:

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{(\mathrm{i}\pi z + \frac{1}{2}(\mathrm{i}\pi z)^2)}{z} = \lim_{z\to 0}(\mathrm{i}\pi + \frac{1}{2}(\mathrm{i}\pi)^2 z) = \mathrm{i}\pi.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{z=0,1}\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}-1}{z^2(z-1)(z+3)}, z\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 - \mathrm{i}\pi \end{aligned}$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^* - 3y^* \mathrm{e}^{-x^*} &= 0, \\ 3x^* \mathrm{e}^{-y^*} - y^* &= 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(x^*, y^*) = (0, 0)$ eine Lösung.

Jeder Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) löst auch das homogene Gleichungssystem in (x, y)

$$\begin{aligned} -x - 3y\mathrm{e}^{-x^*} &= 0, \\ 3x\mathrm{e}^{-y^*} - y &= 0. \end{aligned}$$

Die Determinante ist $1+9\mathrm{e}^{-(x^*+y^*)}$, welche niemals verschwindet. Also ist $(x, y) = (0, 0)$ die einzige Lösung.

Alternativ: Man setzt die beiden Gleichungen ineinander, so gut es geht:

$$\begin{aligned} -x^* - 3\left(3x^* \mathrm{e}^{-y^*}\right) \mathrm{e}^{-x^*} &= 0 \\ \implies 1 + 9\mathrm{e}^{-(x^*+y^*)} &= 0 \end{aligned}$$

Weil die reelle Exponentialfunktion stets positiv ist, ist diese Gleichung unlösbar. $(0, 0)$ ist also der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems.

Die Stabilität wird nach dem Stabilitätssatz für den nicht-linearen Fall anhand der Eigenwerte der Matrix des linearisierten Systems beurteilt. Die Jacobi-Matrix an der Stelle $(0, 0)$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} -1 + 3y\mathrm{e}^{-x} & -3\mathrm{e}^{-x} \\ 3\mathrm{e}^{-y} & -3x\mathrm{e}^{-y} - 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $(-1-\lambda)^2 + 9$ hat die Nullstellen $-1 \pm 3\mathrm{i}$.

Diese beiden Eigenwerte haben negativen Realteil. Damit ist $(0, 0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.

Die Randgeraden des Streifens schneiden sich im Punkt ∞, dessen Bildpunkt sich folglich auf beiden Begrenzungskreisen des Kreisrings zugleich finden müsste.

b) Falsch.

Betrachte $\frac{z+1}{z^2}$.

c) Wahr.

Es ist nämlich $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} * (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

d) Wahr.

Die Nullstelle des Linearfaktors $(z + 1)^2$ hat negativen Realteil und gefährdet damit nicht die Stabilität von p.