Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2011
26.07.2011

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	Σ

Verständnisteil:

4	5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie alle möglichen Laurentreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Geben Sie jeweils Innen- und Außenradius des Kreisrings an, auf dem die Laurentreihe konvergiert.

2. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{z^3}{(z-2i)(z-i)z(z+i)(z+2i)}\, dz.$$

Dabei werde der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = \frac{3}{2}\}$ mathematisch positiv durchlaufen.

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } (x-5)^2 + y^2 > 16\}$.

Bestimmen Sie eine auf $\overline{G} = G \cup \partial G$ stetige Funktion u mit

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \text{ auf } G, &\quad \text{d.h. } u \text{ ist harmonisch in } G, \\ u(x,y) = 0 \text{ für } x = 0, & \\ u(x,y) = 1 \text{ für } (x-5)^2 + y^2 = 16. & \end{aligned}$$

Benutzen Sie hierbei die Methode der Verpflanzung mit der Möbiustransformation f mit $f(z) = i\frac{z+3}{z-3}$, die folgende Eigenschaften hat:

* Sie bildet die imaginäre Achse auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ab.
* Sie bildet den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z-5| = 4\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ab.

(**Dies müssen Sie nicht nachrechnen!**)

Verwenden Sie schließlich die Ansatzfunktionen 1 und $\ln(x^2 + y^2)$.

Verständnisteil

4. Aufgabe 7 Punkte

In der komplexen Ebene seien $\circlearrowleft$ der im Ursprung zentrierte und im positiven Sinn durchlaufene Einheitskreis und $\uparrow$ die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse. f ist eine Möbiustransformation, die $\circlearrowleft$ und $\uparrow$ vertauscht, das heißt:

$$f(\circlearrowleft) = \uparrow, \qquad f(\uparrow) = \circlearrowleft\,.$$

Außerdem ist $f(-1) = 0$.

(i) Wie lauten die Bilder $f(i)$ und $f(-i)$?

(ii) Berechnen Sie $f(z)$ explizit.

5. Aufgabe 9 Punkte

Geben Sie alle Singularitäten der Funktionen f und g an, wobei

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} \quad \text{und} \quad g(z) = \sin(\tfrac{1}{z}) + \frac{1}{z^2 + 2z + 1}.$$

Entscheiden Sie in jedem Fall, ob dies eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle ist. Geben Sie bei Polstellen auch die Ordnung der Polstelle an.

6. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie für das durch

$$\dot{x} = -4x + y,$$
$$\dot{y} = x - 4y$$

beschriebene dynamische System die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilitätscharakter.

7. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Jede richtige und vollständige Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.

(i) Die reelle Funktion $u(x, y) = x^2 + 2y^2$ ist der Realteil einer analytischen Funktion $f(z)$, wobei $z = x + iy$ ist.

(ii) Wenn das Residuum einer Funktion f an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ verschwindet, d.h. $\mathrm{Res}(f, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

(iii) Die Möbiustransformation $f(z) = \frac{2z+i}{z-3}$ bildet jede Gerade wieder auf eine Gerade ab.

(iv) Sei f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Falls f auf der Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nur den Wert null besitzt, dann ist $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.