Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2011
12.10.2011

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	4	Σ

Verständnisteil:

5	6	7	8	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass die Funktion

$$f(z) = ze^z$$

analytisch in ganz $\mathbb{C}$ ist.

2. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie alle möglichen Laurentreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{4z-1}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Geben Sie jeweils die Konvergenzbereiche an, auf denen die Laurentreihe konvergiert.

3. Aufgabe 5 Punkte

Sei $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz.$$

4. Aufgabe 5 Punkte

Verwenden Sie eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x, y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$ um das Differentialgleichungssystem

$$x' = -x^3 - y^3$$
$$y' = 2xy^2 - y^3$$

auf Stabilität und asymptotische Stabilität im Punkt $(0, 0)$ zu untersuchen.

Verständnisteil

5. Aufgabe 8 Punkte

Es sei T eine Möbiustransformation, für die gilt

$$T(i) = \infty, \quad T(-1) = 1 + i, \quad T(1) = 1 - i, \quad T(0) = 2.$$

Bestimmen Sie die Bilder des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und der reellen Achse unter T.

6. Aufgabe 8 Punkte

Bestimmen Sie eine in $\mathbb{C}\backslash\{1, i\}$ analytische Funktion f mit einfachen Polen in 1 und i, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int\limits_{|z|=42} f(z)\, dz = 42.$$

7. Aufgabe 8 Punkte

Es sei z_0 der Schnittpunkt der beiden Kurven

$$\begin{aligned} C_1 &: z_1(s) = se^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 0 \leq s < \infty, \\ C_2 &: z_2(t) = e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Gegeben sei die Funktion $f(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 4$.
Begründen Sie, dass sich die Kurven $f(C_1)$ und $f(C_2)$ im Punkt $f(z_0)$ rechtwinklig schneiden.

8. Aufgabe 6 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine **Begründung oder** ein **Gegenbeispiel** an. Jede richtige und vollständige Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.

(i) Das Produkt zweier Möbiustransformationen ist wieder eine Möbiustransformation.

(ii) Jede Möbiustransformation T mit $T(\infty) = \infty$ bildet Geraden auf Geraden ab.

(iii) Sei f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Falls $\int\limits_C f(z)\, dz = 0$ für jede geschlossene Kurve C ist, dann ist $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.