Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2012
17.07.2012

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	Σ

Verständnisteil:

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie Art und Lage der Singularitäten der Funktion

$$f(z) = e^{\frac{1}{z+2}} + \frac{1}{(z-2)^2}\,.$$

Bestimmen Sie die auf dem Gebiet $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| > 4\}$ konvergente Laurentreihe von f.

2. Aufgabe 10 Punkte

(i) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_1} \frac{(\log(z))^2}{z}\, dz$$

Dabei sei γ_1 das positiv durchlaufene Segment von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ bis i auf dem Einheitskreis.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{z^2-1} + \frac{\sin z}{z-\pi} \right) dz$$

Dabei sei γ_2 der math. positiv durchlaufene Kreis vom Radius $r = 4$ mit Mittelpunkt $z_0 = 1$.

3. Aufgabe 10 Punkte

(i) Rechnen Sie nach, dass das Polynom

$$p(z) = z^3 + 7z^2 + 18z + 14$$

stabil ist.

(ii) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen des folgenden nicht-linearen Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y - y^3, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Sei

$$T(z) = \frac{z+1}{z-i}.$$

(i) Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises unter der Abbildung T. Skizzieren Sie das Bild des Inneren des Einheitskreises unter T.

(ii) Unter welchem Schnittwinkel schneiden sich das Bild der reellen Achse unter T und das Bild des Einheitskreises unter T?

5. Aufgabe 10 Punkte

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, und G die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \leq y\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $f(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$.

Für eine reelle Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ werde folgende Randwertaufgabe gestellt:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{für } x < 0 < y, \\ u(x, 0) = 3x^2 & \text{für } x \leq 0, \\ u(0, y) = -3y^2 & \text{für } y \geq 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung u des Randwertproblems $(*)$.

Hinweis: *Nutzen Sie f als Verpflanzungsfunktion.*

6. Aufgabe 10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Jede richtige und vollständige Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.

(i) Weil unendlich viele Koeffizienten der Laurentreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ ungleich Null sind, hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$.

(ii) Die Funktion $v(x, y) := 2x^2 - 2y^2 - y$ ist der Imaginärteil einer auf ganz $\mathbb{C}$ analytischen Funktion $z \mapsto g(z)$, $z = x + iy$. (Sie müssen die Funktion g nicht bestimmen!)

(iii) Es gibt genau eine Möbiustransformation, die den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbildet.

(iv) Die Funktion $f(z) = z\bar{z}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

(v) Es gilt $\exp(\log(z)) = z$ für alle $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in]-\pi, \pi[$.