Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2012
17.07.2012

Lösungsskizze zur Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

$z_0 = 2$ ist Pol 2. Ordnung, denn $e^{\frac{1}{z+2}}$ ist analytisch in z_0 und die Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 ist also von der Form

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n.$$

$z_1 = -2$ ist eine weitere Singularität. Für $z \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{\frac{1}{z+2}} + \frac{1}{(z-2)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} - \frac{d}{dz}\frac{1}{z-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+2}\frac{1}{1-\frac{4}{z+2}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} - \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)4^n}{(z+2)^{n+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)4^{n-2}}{(z+2)^{n}} \\
&= 1 + \frac{1}{z+2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + (n-1)4^{n-2}\right)\frac{1}{(z+2)^n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}\left(\frac{1}{(-n)!} + (-n-1)4^{-n-2}\right)(z+2)^n + (z+2)^{-1} + 1.
\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass z_1 eine wesentliche Singularität ist.

2. Aufgabe 10 Punkte

(i)

$$\int_{\gamma_1} \frac{(\log(z))^2}{z}\,dz = \left[\frac{1}{3}\log^3(z)\right]_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}^{i} = \frac{1}{3}\left((\log(i))^3 - \left(\log\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{i\pi}{2}\right)^3 - \left(\frac{i\pi}{4}\right)^3\right) = \frac{i\pi^3}{3}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{i\pi^3}{3}\frac{7}{64} = -\frac{7i\pi^3}{192}.$$

(ii) Alle drei Singularitäten $1, -1$ und π liegen imm Innern von γ_2. Weiter gilt:

$$\lim_{z\to\pi} \frac{\sin z}{z-\pi} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{1} = -1.$$

Also ist π eine hebbare Singularität von $\frac{\sin z}{z-\pi}$, also $Res(\frac{\sin z}{z-\pi}, \pi) = 0$. Nach dem Residuensatz unter Ausnützung der Additivität gilt also

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{z^2-1} + \frac{\sin z}{z-\pi}\right) dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2-1}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z-\pi}\,dz$$

$$= 2\pi i\left(Res(\frac{1}{z^2-1}, -1) + Res(\frac{1}{z^2-1}, 1) + Res(\frac{\sin z}{z-\pi}, \pi)\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) = 0.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

(i) Das Routh-Verfahren liefert bei den ersten Schritten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 7 & 14 \\ 16 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Es bricht hiernach ab. Alle Einträge der 1. Spalte sind positiv. Also ist p stabil.

(ii) Gleichgewichtspunkte: Aus der zweiten Gleichung folgt $x = y$. Aus der ersten Gleichung folgt dann $0 = y^3 - 4y = y(y^2-4) = y(y+2)(y-2)$. Die Punkte $(0,0), (-2,-2), (2,2)$ sind also GGPs.

Weiter ist

$$\vec{F}'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1 & 5 - 3y_0^2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

und damit

$$p_{(x_0,y_0)}(\lambda) := \det(\vec{F}'(x_0,y_0) - \lambda I) = (-1-\lambda)^2 - 5 + 3y_0^2 = \lambda^2 + 2\lambda - 4 + 3y_0^2.$$

Damit sind die Eigenwerte von $\vec{F}'(0,0)$ die Lösungen von $\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$, also $-1 \pm \sqrt{5}$. Da $-1 + \sqrt{5} > 0$, ist $(0,0)$ instabil.

$\vec{F}'(-2,-2)$ und $\vec{F}'(2,2)$ haben die gleichen Eigenwerte. Diese sind die Lösungen von $\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$, also $-1 \pm i\sqrt{7}$. Die Realanteile der beiden Eigenwerte sind negativ. Also sind die beiden GGPS $(-2,-2)$ und $(2,2)$ stabil.

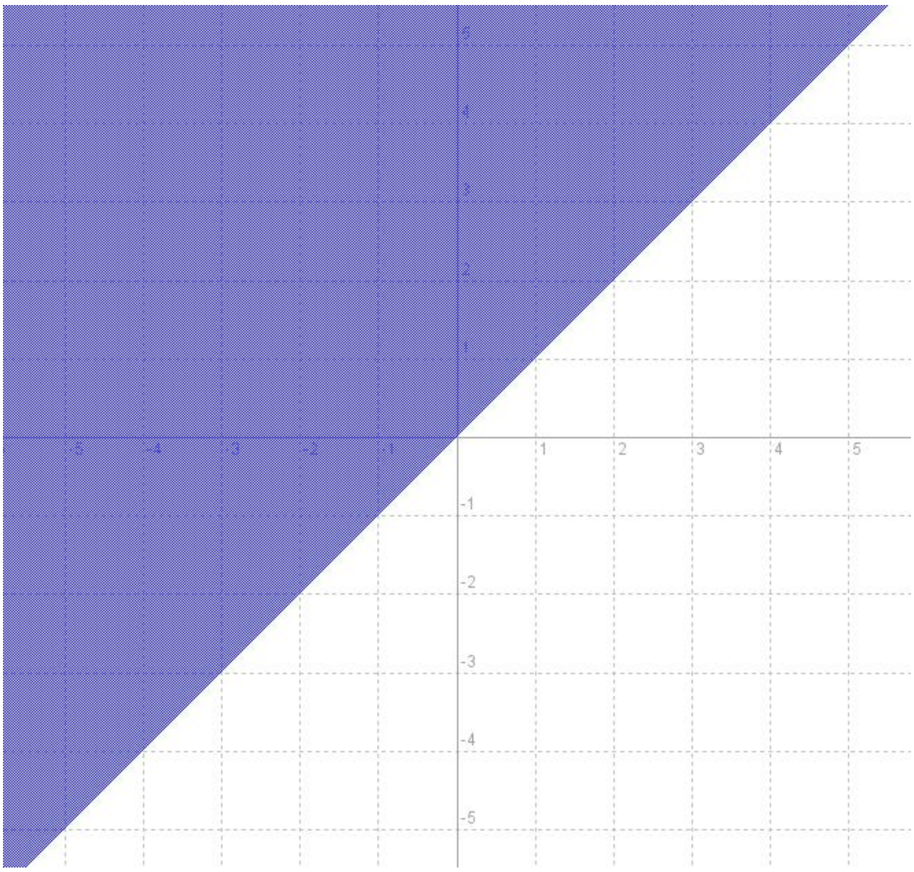
Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

(i) Es ist $T(1) = \frac{2}{1-i} = 1+i$, $T(i) = \infty$, $T(-1) = 0$, $T(-i) = \frac{1-i}{-2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Da T eine Möbiustransformation ist, werden Kreise auf Geraden oder Kreise abgebildet. Wegen $T(i) = \infty$, wird der Einheitskreis auf eine Gerade abgebildet, und zwar die Gerade $g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Wenn man den Einheitskreis in positiver Richtung in -1 startend durchläuft, sieht man (mit der "rechte Hand Regel"/Orientierungserhaltung), dass das Innere des Einheitskreises auf den "oberen" Bereich über der Geraden g abgebildet wird, d.h.,

$$T(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}.$$

Skizze:



(ii) Die reelle Achse schneidet den Einheitskreis in 1 und -1 im rechten Winkel. Daraus folgt mit Konformität von T, dass das Bild der reellen Achse unter T das Bild des Einheitskreises unter T jeweils in $1+i$ und 0 ebenfalls im rechten Winkel schneidet.

(Das Bild der reellen Achse ist der Kreis, der 0, $1+i$ und $i = T(0)$ als Punkte hat, also der Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ und Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$.)

5. Aufgabe 10 Punkte

(i) Es gilt $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$. Es reicht zu zeigen, dass es für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \leq 0$ einen Punkt $(x_0, y_0) \in G$ gibt, so dass $f(x_0, y_0) = (x, y)$. Offensichtlich ist $f(0,0) = (0,0)$. Also können wir annehmen, dass $(x,y) \neq (0,0)$. Sei $z := \sqrt{x^2+y^2} e^{i \arg(x,y)}$ wegen $y \leq 0$ ist $\arg(x,y) \in [\pi, 2\pi]$. Setzt man $z_0 := \sqrt[4]{x^2+y^2} e^{i \frac{\arg(x,y)}{2}}$, so ist $f(z_0) = z_0^2 = z$. Weiter ist $\frac{\arg(x,y)}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Deshalb erfüllen $x_0 := \mathrm{Re}(z_0)$ und $y_0 := \mathrm{Im}(z_0)$ die Bedingung $x_0 \leq 0 \leq y_0$, also ist $(x_0, y_0) \in G$.

(ii) $u(x,y) := 3x^2 - 3y^2 + cxy$, $c \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung des Randwertproblems $(*)$.

Lösungsweg mit Verpflanzungsfunktion $f(z) = z^2$:

Für die Randbedingungen erhalten wir

$$3x^2 = v(\mathrm{Re}\, f(x+0i), \mathrm{Im}\, f(x+0i)) = v(x^2, 0), \quad x \leq 0,$$

und

$$-3y^2 = v(\mathrm{Re}\, f(0+iy), \mathrm{Im}\, f(0+iy)) = v(-y^2, 0), \quad y \geq 0.$$

Insgesamt stellt sich also folgendes Randwertproblem auf $f(G)$:

$$\begin{cases} \Delta v(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R},\ y < 0, \\ v(x,0) = 3x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Als Ansatzfunktion wähle man $Ax + By + C$. Es folgt

$$Ax + C = 3x, \quad x \in \mathbb{R},$$

also ist $C = 0$, $A = 3$ und $B \in \mathbb{R}$ beliebig also $v(x,y) = 3x + By$. Nun ist $u(x,y) = v(\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy))) = v(x^2 - y^2, 2xy) = 3x^2 - 3y^2 + 2Bxy$. Da $B \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden kann, ist $u(x,y) := 3x^2 - 3y^2 + cxy$, $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Randwertproblems $(*)$.

6. Aufgabe 10 Punkte

(i) Nein. $f(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ hat eine hebbare Singularität in 0.

Beweis:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} f(z) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{z}{z-1} = 0.$$

Die Taylorreihe von f in 0 lautet

$$f(z) = -z\sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=1}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1.$$

f hat allerdings einen Pol erster Ordnung in $z_0 = 1$, was man an der Partialbruchzerlegung

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

sehen kann.

(ii) Ja. Es gilt

$$\Delta v(x,y) = \Delta(2x^2 - 2y^2 - y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(2x^2 - 2y^2 - y) = 4 - 4 = 0.$$

Also ist v auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch und deshalb der Imaginärteil einer auf ganz $\mathbb{C}$ analytischen Funktion (nämlich $g(z) := 2iz^2 - z$).

(iii) Nein. Gegenbeispiel: $z \mapsto z$ und $z \mapsto iz$ sind zwei unterschiedliche Möbiustransformationen, die den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbilden. Es gibt sogar unendlich viele davon, nämlich

$$z \mapsto e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z},$$

$\varphi \in [0, 2\pi[$, $|z_0| < 1$.

(iv) Nein. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sind nicht für $z \mapsto z\bar{z} = |z|^2$ auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt.

Beweis:

Schreibe $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Für $f : z \mapsto z\bar{z}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)\overline{(x+iy)} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$. Also ist der Realteil $u(x,y) = x^2 + y^2$ und der Imaginärteil $v(x,y) = 0$. Es gilt aber $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2x$ und $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 2y$ und $-\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) = 0$. Deshalb sind die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen nur in $(0,0)$ erfüllt.

(Es reicht natürlich aus zu zeigen, dass $\Delta u(x,y) = 4 \neq 0$ ist.)

(v) Ja. Sei $z \in G := \left\{re^{i\varphi} \mid r > 0,\ \varphi \in]-\pi, \pi[\right\}$ (Schlitzgebiet). Dann ist

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z) = \ln(r) + i\varphi$$

und daher

$$\exp(\log(z)) = \exp(\ln(r) + i\varphi) = \exp(\ln(r))e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z.$$

Also gilt die Formel für jedes $z \in G$.