Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2012
10.10.2012

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	Σ

Verständnisteil:

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale:

(i)

$$\int_C \frac{1}{|z|^2}\, dz,$$

wobei C der im mathematisch negativen Sinne (im Uhrzeigersinn) durchlaufene Einheits-Halbkreis von 1 (über $-i$) bis -1 ist.

(ii)

$$\int_{|z|=\pi} \frac{\sin(z)}{z\cos(z)}\, dz.$$

2. Aufgabe 12 Punkte

Sei

$$f(z) := \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{z}.$$

Bestimmen Sie alle Taylor- und Laurentreihen von f im Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und geben Sie jeweils deren Konvergenzbereich an.

3. Aufgabe 8 Punkte

Benutzen Sie eine Lyapunovfunktion der Form $V(x,y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$ um das Stabilitätsverhalten des folgenden (nicht-linearen) Differenzialgleichungssystems um $(0,0)$ zu bestimmen:

$$\begin{cases} x' = -x + 3y^3, \\ y' = -2xy^2 - x^2y - 5y. \end{cases}$$

Zeigen Sie ebenfalls, dass $(0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

Verständnisteil

4. Aufgabe 11 Punkte

Sei $u(x,y) := \cosh(x)\cos(y)$.

(i) Zeigen Sie, dass u der Realteil einer auf $\mathbb{C}$ analytischen Funktion f ist.

(ii) Bestimmen Sie den Imaginärteil von f.

5. Aufgabe 11 Punkte

Sei T eine Möbiustransformation, so dass gilt:

* T hat einen Fixpunkt in $-i$,
* $T(i) = 2i$,
* T bildet den im (mathematisch) positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreis auf die „von unten nach oben“ durchlaufene imaginäre Achse ab.

(i) Sei $T(1) = a + bi$, für $a, b \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass $a = 0$ und $b \in]-1, 2[$.

(ii) Auf welche Teilmenge von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird das Innere des Einheitskreises abgebildet?

(iii) Zeigen Sie, dass sich das Bild der reellen Achse mit der imaginären Achse schneidet, und bestimmen Sie den Schnittwinkel.

6. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Jede richtige und vollständige Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.

(i) $f(z) := \frac{1}{3}z^3 + z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ winkeltreu.

(ii) $\displaystyle\int_{|z-\frac{i}{2}|=1} \frac{e^{iz}}{z(z-3)}\,dz = \int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z(z-3)}\,dz.$

(iii) Wenn ein Polynom $p(z)$ stabil ist, ist auch $-p(z)$ stabil.

(iv) Die Abbildung $z \mapsto \dfrac{z-1}{2z+i}$ ist invertierbar.