Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
A. Gündel-vom Hofe 19. Juli 2013

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}$ in Laurent-Reihen um die Stelle 0 auf allen möglichen maximalen Konvergenzgebieten.
Hinweis: Es gibt drei maximale Konvergenzgebiete.
Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihen akzeptieren wir die Schreibweisen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cdots) z^n \text{ und } \sum_{n=-\infty}^{-1} (\cdots) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\cdots) z^n.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}{1-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$ **(5 Punkte)** und b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **(5 Punkte)**

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Eine Abschätzung von Beiträgen unendlich großer Halbkreise o. dgl. ist nicht verlangt.
Rechenvorteil: Lesen Sie einen Bruch $\frac{A}{x^3}$ auch als $\frac{Ax}{x^4}$.

3. Aufgabe

11 Punkte

Finden Sie eine auf dem Winkelgebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ und } y < x\}$ harmonische Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Randwertvorgaben

$$u(x,y) = x^4 \quad \text{für } y = 0,$$
$$u(x,y) = -4x^4 \quad \text{für } x = y,$$

indem Sie mit Hilfe der komplexen Abbildung $z \mapsto z^2$ Randwertvorgaben für eine auf den ersten Quadranten harmonische Funktion $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulieren und für diese Funktion v den harmonischen Ansatz $A(x^2-y^2) + Bx + Cy$ mit festzulegenden reellen Konstanten A, B und C verwenden.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie diejenige Möbius-Transformation T, welche erstens die Eigenschaft $T(-\mathrm{i}) = 1$ hat und zweitens die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ mit der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse $\uparrow$ vertauscht und außerdem den im Ursprung zentrierten und im positiven Drehsinn durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowleft$ in denselben Kreis $\circlearrowright$, aber mit negativem Durchlaufssinn, überführt:

$$T(\rightarrow) = \uparrow, \quad T(\uparrow) = \rightarrow, \quad T(\circlearrowleft) = \circlearrowright .$$

Hinweis: Die beiden Achsen schneiden sich in zwei Punkten.

5. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$ **(4 Punkte)** und b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$ **(6 Punkte)**

entlang der Strecke $\mathcal{C}\colon t \mapsto \mathrm{i}t,\ -1 \le t \le 1$.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Wenn in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ zwei vorgegebene reelle Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ harmonisch sind, so ist die durch $f(x+\mathrm{i}y) := u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ definierte komplexe Funktion $f(z)$ im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ analytisch.

b) Hat eine Möbius-Transformation drei Fixpunkte, so ist sie gleich der Identitätstransformation $z \mapsto z$.

c) Für jede Zahl $R \in \mathbb{R}^+$ gilt $\displaystyle\int_{|z-2R|=R} \tfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0$.
(Der Kreis $|z-2R| = R$ wird im positiven Drehsinn ($\circlearrowleft$) durchlaufen.)

d) Die Funktion $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\mathrm{e}^z-1}{z}$ hat an der Stelle 0 eine Polstelle 1. Ordnung.

e) Für eine analytische Funktion $f(z)$ gilt: Gehört die Stelle z_0 zum Definitionsbereich dieser Funktion $f(z)$, so gilt $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = 0$.