Musterlösung — Analysis III f. Ing., 09. Oktober 2013

1. Aufgabe 9 Punkte

Die Lage der Polstellen -1 und 3 führt zu drei maximalen Konvergenzgebieten, nämlich zur offenen Kreisscheibe $|z| < 1$, zum Kreisring $1 < |z| < 3$ und zum Außengebiet $|z| > 3$ eines Kreises.

Man hat die folgenden Rechnungen:

- $|z| < 1$:

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3-z} - \frac{1}{1-(-z)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{1-(-z)}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^{n+1}\right] z^n$$

- $1 < |z| < 3$:

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}$$
$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{-(n+1)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$$

- $3 < |z|$:

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{3}\frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{-(n+1)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(3^{-n-1} + (-1)^n\right) z^n$$

2. Aufgabe

11 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{2+z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= -\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z(2+z^2)}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Der Integrand hat 0, $\mathrm{i}\sqrt{2}$ und $-\mathrm{i}\sqrt{2}$ als Polstellen 1. Ordnung, von denen aber nur die erste von der Integrationskurve umschlossen wird. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(2+z^2)},0\right) = 2\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{\frac{1}{2+z^2}}{z},0\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2+z^2}\right)\Big|_{z=0} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}
$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind die Nullstellen $-2\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, -3\mathrm{i}$ und $3\mathrm{i}$. von denen haben nur die zweite und die vierte einen positiven Imaginärteil. Die Nullstellen sind allesamt einfach.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)},2\mathrm{i}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)},3\mathrm{i}\right)\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{(x+2\mathrm{i})(x^2+9)}\Big|_{x=2\mathrm{i}} + \frac{1}{(x^2+4)(x+3\mathrm{i})}\Big|_{x=3\mathrm{i}}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4\mathrm{i}\cdot 5}+\frac{1}{(-5)\cdot 6\mathrm{i}}\right) \\
&= \pi\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right) \\
&= \frac{\pi}{30}.
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe 10 Punkte

(Das Gebiet G stellt die Halbebene links der Geraden $x = 1$ dar, wobei aber aus der Halbebene die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ und Radius $\frac{4}{3}$ ausgestanzt wurde.)

Mit den Angaben zur Möbiustransformation T_1 hat man für die verpflanzte Funktion v im Bildgebiet folgende Randwerte:

$$x^2 + y^2 = 1: \quad v(x,y) = 1; \qquad x^2 + y^2 = 4: \quad v(x,y) = 1 + \ln 4;$$

Für die Lösung im Bildgebiet hat man mit

$$v(x,y) = A \ln(x^2 + y^2) + B$$

und geeigneten Konstanten A, B die Bedingungen

$$x^2 + y^2 = 1: \quad v(x,y) = 1; \qquad x^2 + y^2 = 4: \quad v(x,y) = 1 + \ln 4.$$

zu erfüllen. Es ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1: &\quad v(x,y) = A = 1; \\ x^2 + y^2 = 4: &\quad v(x,y) = A + B \ln 4 = \ln 4 + 1 \implies B = 1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$v(x,y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$$

Wir benutzen nun den Hinweis $x^2 + y^2 = |x + \mathrm{i}y|^2$ und haben

$$v(x,y) = 1 + \ln |x + \mathrm{i}y|^2.$$

Die Verpflanzung geht dann wie folgt:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v\big(\operatorname{Re} T(x + \mathrm{i}y), \operatorname{Im} T(x + \mathrm{i}y)\big) \\ &= 1 + \ln\big((\operatorname{Re} T(x + \mathrm{i}y))^2 + (\operatorname{Im} T(x + \mathrm{i}y))^2\big) = 1 + \ln |T(x + \mathrm{i}y)|^2. \end{aligned}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 1 + \ln |T(x + \mathrm{i}y)|^2 = 1 + \ln \left| -1 + \frac{2}{x + \mathrm{i}y} \right|^2 = 1 + \ln \left| \frac{2 - x - \mathrm{i}y}{x + \mathrm{i}y} \right|^2 \\ &= 1 + \ln \frac{|2 - x - \mathrm{i}y|^2}{|x + \mathrm{i}y|^2} = 1 + \ln \frac{(x-2)^2 + y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Die Lösung des gestellten Randwertproblems ist damit durch

$$u(x,y) = 1 + \ln \frac{(x-2)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

gegeben.

Alternative:

Falls der „Trick“ $x^2 + y^2 = |x + \mathrm{i}y|^2$ nicht benutzt wurde, kann man auch wie folgt rechnen.

Die Möbius-Transformation T_1 als $\mathbb{R}^2$-Abbildung bildet den Punkt (x, y) wegen

$$T(x + \mathrm{i}y) = -1 + \frac{2}{x + \mathrm{i}y} = -1 + \frac{2(x - \mathrm{i}y)}{x^2 + y^2} = -\frac{x^2 - 2x + y^2}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{2y}{x^2 + y^2}$$

auf den Punkt $\left(-\frac{x^2-2x+y^2}{x^2+y^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ ab. Mit $v(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$ ist dann

$$u(x, y) = v\left(-\frac{x^2 - 2x + y^2}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = 1 + \ln\frac{(x^2 - 2x + y^2)^2 + 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Zur Bewertung: Dieser Ausdruck wird als Ergebnis auch anerkannt.

Offensichtlich (☺) gilt $(x^2 - 2x + y^2)^2 + 4y^2 = ((x - 2)^2 + y^2)(x^2 + y^2)$, so dass man vereinfachen kann:

$$u(x, y) = 1 + \ln\frac{(x - 2)^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit

$$T(-1) = 0, \quad T(0) = 1, \quad T(1) = \infty$$

sieht man, dass die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ auf sich ($\rightarrow$) abgebildet wird.
Auf der imaginären Achse wählen wir von unten nach oben die Punkte 0, i und ∞. Dann ist

$$T(0) = 1, \quad T(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}+1}{-\mathrm{i}+1} = \frac{(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+1)}{2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}, \quad T(\infty) = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{-1+\frac{1}{\infty}} = -1.$$

Die drei Bildpunkte bestimmen erkennbar den Kreis $|z| = 1$. Das Bild der imaginären Achse ist der Kreis $|z| = 1$, der positiv durchlaufen wird.

b) Ein (echter) Kreis wird von T_2 genau dann auf eine Gerade abgebildet, wenn der Punkt 1 auf dem Kreis liegt, d.h. die Kreisgleichung erfüllt: $|1 - m| = r$.

c) Der zweite Quadrant liegt zur Linken der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse und zur Linken der von links nach rechts durchlaufenen reellen Achse.
Nach den Angaben in Teilaufgabe a) liegt das Bild des zweiten Quadranten sowohl im Inneren des Einheitskreises als auch oberhalb der reellen Achse.
Es handelt sich somit um die obere Halbkreisscheibe $\{z \mid |z| < 1 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) $\mathcal{C}_1$: Der Integrand hat z.B. die Funktion $\ln(-z-1)$ als eine Stammfunktion, in deren Definitionsbereich die Strecke $\mathcal{C}_1$ liegt.
Es ist somit

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = [\ln(-z-1)]_{z=-2-\mathrm{i}}^{z=-2+\mathrm{i}} = \ln(1-\mathrm{i}) - \ln(1+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$$

$\mathcal{C}_2$: Der Integrand hat die Funktion $\ln(z+1)$ als eine Stammfunktion, in deren Definitionsbereich die Strecke $\mathcal{C}_2$ liegt.
Es ist somit

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = [\ln(z+1)]_{z=-2-\mathrm{i}}^{z=0} = \ln 1 - \ln(-1-\mathrm{i}) = -\left(\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}$$

b) Die Kurve $-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ ist ein Dreieck, welches im positiven Drehsinn umlaufen wird. Die einzig vorhandene Singularität -1 des Integranden liegt innerhalb dieser Kurve. Nach der Cauchyschen Integralformel ist damit

$$\int_{-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot 1 = 2\pi\mathrm{i}.$$

Alternative: Man kann auch das Integral über $\mathcal{C}_3$ auswerten:

$$\int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = [\ln(z+1)]_{z=0}^{z=-2+\mathrm{i}} = \ln(-1+\mathrm{i}) - \ln 1 = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}.$$

Dann ist

$$\int_{-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = -\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) = 2\pi\mathrm{i}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden in $\mathbb{C}$ nirgends erfüllt: Mit $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ hat man $u_x(x, y) = 1$ und $v_y(x, y) = -1$ und findet somit, dass $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ stets falsch ist.

b) Wahr.
Die Ableitung von e^z ist gleich e^z, welche stets von Null verschieden ist. Die analytische Abbildung e^z ist damit überall winkeltreu.

c) Falsch.
Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $\frac{1}{z^2}$. Das angegebene Integral verschwindet, aber die Funktion ist in 0 nicht analytisch.

d) Wahr.
Man entwickelt den Term $\frac{z^2}{z}$ in eine Laurent-Reihe um 0. In jedem Kreisring um 0 gilt $z \neq 0$ und damit darf man den Bruch $\frac{z^2}{z}$ mit z kürzen:

$$\frac{z^2}{z} = z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } a_1 = 1, a_k = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}.$$

Diese Laurent-Reihe hat keinen Hauptteil, damit stellt der Entwicklungspunkt 0 eine hebbare Singularität dar.

e) Wahr.
Es ist $\mathcal{Z}[(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)](z) = 1 + z^{-2} + z^{-4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-2})^k = \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1}$.