Musterlösung — Analysis III f. Ing., 31. Juli 2014

1. Aufgabe

9 Punkte

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3}{z(z-3)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-3}$$

Um eine im Ringgebiet $1 < |z-1| < 2$ konvergente Laurent-Reihe zu erhalten, entwickelt man den Term $\frac{1}{z}$ im Außengebiet $|z-1| > 1$ und den Term $\frac{1}{z-3}$ im Innengebiet (offene Kreisscheibe) $|z-1| < 2$.

Man hat also

$$\frac{3}{z(z-3)} = -\frac{1}{(z-1)+1} + \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-1)^n$$

Die erste geometrische Reihe konvergiert für $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, also für $|z-1| > 1$. Die zweite geometrische Reihe konvergiert für $|\frac{z-1}{2}| < 1$, also für $|z-1| < 2$. Damit gilt die gesamte Reihenwicklung im Kreisring $1 < |z-1| < 2$.

In verschiedenen Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{z(z-3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n \text{ mit } a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } n < 0 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} & \text{für } n \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

12 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{|z|=1} \frac{-\mathrm{i}z^{-1}}{2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=1} \frac{-2\mathrm{i}}{4z+z^2+1}\,\mathrm{d}z \\
&= -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+1}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Der Integrand hat $-2+\sqrt{3}$ und $-2-\sqrt{3}$ als Polstellen 1. Ordnung. Davon liegt nur $-2+\sqrt{3}$ innerhalb der Integrationskurve. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=-2+\sqrt{3}} \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \left.\frac{1}{-4+2\sqrt{3}+4}\right|_{z=-2+\sqrt{3}} \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \frac{1}{-4+2\sqrt{3}+4} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ und $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$, von denen haben nur die ersten beiden positiven Imaginärteil. Die Nullstellen sind allesamt einfach.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{x^4+16}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{x^4+16}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{1}{4x^3}\right|_{x=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} + \left.\frac{1}{4x^3}\right|_{x=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{x}{4x^4}\right|_{x=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} + \left.\frac{x}{4x^4}\right|_{x=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{4\cdot(-16)} + \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{4\cdot(-16)}\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{2}{64}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{2}{64}\right)\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} + \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{16}\cdot\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

9 Punkte

a) Die Abbildung $z \mapsto z^2$ als Abbildung im $\mathbb{R}^2$ gelesen bedeutet wegen $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i} \cdot 2xy$ die Zuordnung $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Es ist also $\tilde{x} = x^2 - y^2$ und $\tilde{y} = 2xy$.
Die x-Achse wird mit $(t, 0)$ parametrisiert, die Winkelhalbierende $(y = x)$ mit (t, t) — beidemals mit $0 \leq t < \infty$. Dann werden die Randkurven wie folgt abgebildet:

$$(t, 0) \mapsto (t^2, 0), \qquad (t, t) \mapsto (0, 2t^2).$$

Die begrenzenden Halbgeraden des Winkelgebiets finden sich als die $\tilde{x}$- und die $\tilde{y}$-Achse wieder. Die Abbildung f bildet das Winkelgebiet in der Tat auf den ersten Quadranten ab.

b) Auf der Randkurve $\tilde{x} > 0, \tilde{y} = 0$ des 1. Quadranten prüfen wir die Randwertvorgabe $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\tilde{x}$ darauf, ob sie die Randwertvorgabe $u(x, y) = 2x^2$ für $u(x, y)$ auf der Randkurve $x > 0, y = 0$ des Winkelgebiets wiedergibt:

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x^2 - 0^2, 2x \cdot 0) = \tilde{u}(x^2, 0) = 2x^2.$$

Die Randwertvorgabe $u(x, y) = 2x^2$ wird korrekt wiedergegeben.
Auf der Randkurve $\tilde{x} = 0, \tilde{y} > 0$ des 1. Quadranten prüfen wir die Randwertvorgabe $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 3\tilde{y}$ darauf, ob sie die Randwertvorgabe für $u(x, y)$ auf der Randkurve $x = y$ des Winkelgebiets wiedergibt:

$$u(x, y) = \tilde{u}(x^2 - x^2, 2x^2) = \tilde{u}(0, 2x^2) = 6x^2.$$

Die Randwertvorgabe $u(x, y) = 6x^2$ wird korrekt wiedergegeben.

c) Mit dem vorgeschlagenen Ansatz setzen wir $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = A(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) + B\tilde{x} + C\tilde{y}$ und finden sofort $A = 0$, $B = 2$, und $C = 3$.

d) Mit der gegebenen Formel haben wir

$$u(x, y) = \tilde{u}(x^2 - y^2, 2xy) = 2(x^2 - y^2) + 3(2xy) = 2(x^2 - y^2) + 6xy.$$

4. Aufgabe

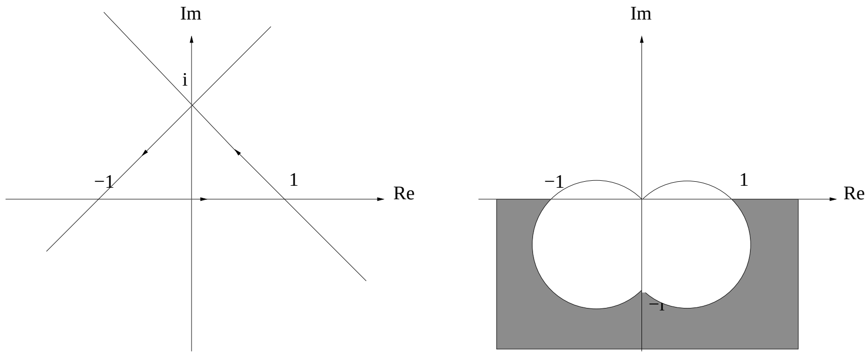
10 Punkte

a) Es gilt

$$T(1) = 1, \quad T(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}, \quad T(-1) = -1.$$

Mit $T(\infty) = 0$ gehen die Bildkurven $T(\nwarrow)$, $T(\swarrow)$ und $T(\to)$ alle durch den Punkt 0.
Die Bildkurven $T(\nwarrow)$ und $T(\swarrow)$ sind Kreise.
Der Kreis $T(\nwarrow)$ geht durch 1, $-\mathrm{i}$ und 0 und wird damit negativ durchlaufen. Die drei genannten Punkte sind Ecken eines Einheitsquadrats mit Mittelpunkt $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$. Der Kreis $T(\nwarrow)$ ist folglich gleich dem Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$ und Radius $\sqrt{2}$.
Der Kreis $T(\swarrow)$ geht durch $-\mathrm{i}$, -1 und 0 und wird damit negativ durchlaufen. Die drei genannten Punkte sind Ecken eines Einheitsquadrats mit Mittelpunkt $-\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. Der Kreis $T(\swarrow)$ ist gleich dem Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ und Radius $\sqrt{2}$.
Die Bildkurve $T(\to)$ geht durch -1, 1 und 0. Sie ist damit eine Gerade und gleich der reellen Achse, welche von rechts nach links durchlaufen wird.

b) Das Dreiecksgebiet $\triangle$ liegt zur Linken der Geraden $\nwarrow$, $\swarrow$ und $\to$.
Damit liegt das Bildgebiet $T(\triangle)$ außerhalb der Kreise $T(\nwarrow)$ und $T(\swarrow)$ und in der unteren Halbebene. Es handelt sich um das graue unbeschränkte Gebiet in der rechten Abbildung.



5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es muss ein „verschobener“ oder „gedrehter“ Logarithmus aufgefunden werden, dessen Schlitz nicht auf der Strecke von $-2-\mathrm{i}$ nach $-2+\mathrm{i}$ liegt.

Im Schlitzgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re} z < -1\}$ (gleich der ab dem Punkt -1 nach rechts aufgeschlitzten komplexen Ebene) ist die Funktion $\ln(-(z+1))$ eine Stammfunktion des Integranden $\frac{1}{z+1}$. Zugleich liegt die Kurve $\mathcal{C}$ in diesem Schlitzgebiet.

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z &= \ln(-(z+1))\Big|_{z=-2-\mathrm{i}}^{z=-2+\mathrm{i}} \\ &= \ln(-(-1+\mathrm{i})) - \ln(-(-1-\mathrm{i})) = \ln(1-\mathrm{i}) - \ln(1+\mathrm{i}) \\ &= \left(\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) - \left(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Das Integral hat den Wert $-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.

b) Wir benutzen die Cauchysche Integralformel. Die Funktion e^z ist auf jedem Gebiet analytisch, welches die Kreisscheibe $|z+1| \leq 3$ umfasst. Die Integrationskurve $|z+1| = 3$ ist geschlossen; die Nullstelle 1 des Nenners liegt innerhalb dieser Integrationskurve.

Damit gilt

$$\int_{|z+1|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^z\Big|_{z=1} = 2\pi\mathrm{e}\mathrm{i}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Die Funktion $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ist der Realteil der Funktion $\ln z$ mit $z := x + \mathrm{i}y$. Die Funktion $\ln z$ ist auf der offenen komplexen rechten Halbebene analytisch. Der (als $\mathbb{R}^2$-Funktion angesehene) Realteil einer analytischen Funktion ist harmonisch. Damit ist $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ auf H harmonisch.

Die Funktion $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ist sogar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ harmonisch.

b) Falsch.
Ein Gegenbeispiel: Man wähle $T_1(z) = z$ und $T_2(z) = \frac{1}{z}$. Die Summe $z + \frac{1}{z}$ ist keine Möbius-Transformation, da sie

α) mit $z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z}$ sich nicht in der Form $\frac{az+b}{cz+d}$ schreiben lässt;

β) nicht injektiv ist: Wegen

$$T_1(\mathrm{i}) + T_2(\mathrm{i}) = T_1(-\mathrm{i}) + T_2(-\mathrm{i}) = 0$$

hat der Punkt 0 zwei verschiedene Urbilder.

c) Wahr.
Jede vorgegebene Kurve $\mathcal{C}$ liegt in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, wo die Funktion $f(z)$ als analytisch vorausgesetzt wurde. Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt damit $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

d) Falsch.

α) Man setze z.B. $f(z) = \frac{\pi}{z} + \frac{1}{z^2}$. Die Stelle 0 ist ein Pol 2. Ordnung, und es gilt $\operatorname{Res}(f(z), 0) = \pi$.

β) Die Eigenschaft „Pol 2. Ordnung“ besagt, dass der Hauptteil der Laurent-Reihe nur bis $(z - z_0)^{-2}$ geht, und lässt damit einen Summanden $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$ mit $a_{-1} \neq 0$ zu.

e) Falsch. Die Eigenwerte der Systemmatrix haben beide negativen Realteil, damit ist der GGP asymptotisch stabil. Das Phasenporträt suggeriert aber einen instabilen GGP.