Musterlösung — Analysis III f. Ing., 09. Oktober 2014

1. Aufgabe

9 Punkte

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}$$

Um eine im Ringgebiet $1 < |z-2| < 5$ konvergente Laurent-Reihe zu erhalten, entwickelt man den Term $\frac{1}{z-1}$ im Außengebiet $|z-2| > 1$ und den Term $\frac{1}{z+3}$ im Innengebiet (offene Kreisscheibe) $|z-2| < 5$.
Man hat also

$$\frac{4}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-2)+1} - \frac{1}{(z-2)+5}$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{5}} = -\left(-\frac{1}{z-2}\right) \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z-2}\right)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{5}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^{-(n+1)}(z-2)^n$$

Die erste geometrische Reihe konvergiert für $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, also für $|z-2| > 1$. Die zweite geometrische Reihe konvergiert für $|\frac{z-2}{5}| < 5$, also für $|z-2| < 5$. Damit gilt die gesamte Reihenwicklung im Kreisring $1 < |z-2| < 5$.

In verschiedenen Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(z-1)(z+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^{-(n+1)}(z-2)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1}(z-2)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^{-(n+1)}(z-2)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^n \text{ mit } a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{für } n < 0 \\ \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} & \text{für } n \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-\mathrm{i}z^{-1}}{2+z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-\mathrm{i}}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Der Integrand hat 0 und -2 als Polstellen 1. Ordnung. Nur die Polstelle 0 liegt innerhalb der Integrationskurve. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(z+2)}, 0\right) \\ &= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{1}{z+2}\right|_{z=0}\right) = -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2} = \pi\end{aligned}$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4}}$, von denen hat nur die erste einen positiven Imaginärteil. (Die Nullstellen sind beide einfach; der Zählergrad ist 0 und damit um 2 Einheiten kleiner als der Nennergrad, welcher gleich 2 ist)
Es gilt

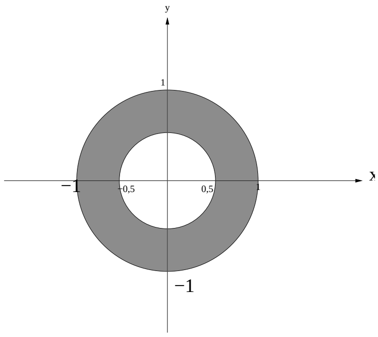
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{x^2+x+1}, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{1}{2x+1}\right|_{x=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4}}} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Mit $T(0) = -\mathrm{i}$, $T(1) = 1$ und $T(\infty) = \mathrm{i}$ wird die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse auf den im positiven Drehsinn durchlaufenen Einheitskreis abgebildet. Die obere Halbebene liegt zur Linken der reellen Achse, das Innere des Einheitskreis liegt gleichfalls links der Peripherie.

b) Das Gebiet G liegt außerhalb des Kreises $x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$, damit liegt das Bildgebiet $T(G)$ außerhalb des Bildkreises $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Aus Teil a) geht hervor, dass das Gebiet G in das Innere des Kreises $|z| = 1$ abgebildet wird. Somit wird das Gebiet G genau auf das Gebiet zwischen den Kreisen $|z| = \frac{1}{2}$ und $|z| = 1$ abgebildet, d.h. $T(G)$ ist ein in 0 zentrierter Kreisring mit Innenradius $\frac{1}{2}$ und Außenradius 1.



c) Auf der x-Achse soll die gesuchte Lösung den Wert 0 annehmen. Die x-Achse wird auf den Einheitskreis abgebildet. Die Ansatzfunktion muss damit für $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$ den Wert 0 annehmen:

$$A \ln(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + B = A \ln 1 + B = B = 0.$$

Auf dem Kreis um $(0, \frac{4}{3})$ mit Radius $\frac{4}{3}$ soll die gesuchte Lösung den Wert 1 annehmen. Dieser Kreis wird auf den Kreis um den Ursprung mit Radius $\frac{1}{2}$ abgebildet. Die Ansatzfunktion muss damit für $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \frac{1}{4}$ den Wert 1 annehmen:

$$A \ln(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + B = A \ln \frac{1}{4} + B = 1.$$

Mit $B = 0$ findet sich

$$A = \frac{1}{\ln \frac{1}{4}} = -\frac{1}{\ln 4},$$

also ist $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{1}{\ln 4} \ln(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)$ die harmonische Lösung im Kreisring.

Mit $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = |T(x + \mathrm{i}y)|^2$ finden wir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\ln |T(x + \mathrm{i}y)|^2}{\ln 4} = -\frac{1}{\ln 4} \ln \left| \frac{\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 1}{x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}} \right|^2 \\ &= -\frac{1}{\ln 4} \ln \frac{|-y + 1 + \mathrm{i}x|^2}{|x + \mathrm{i}(y + 1)|^2} = -\frac{1}{\ln 4} \ln \frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2} \end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Komplexe Differenzierbarkeit an einer Stelle bedeutet gleichwertig, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen an dieser Stelle erfüllt werden.

Mit $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp \bar{z} = \exp(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}(-\mathrm{e}^x \sin y).$$

Die Cauchy-Riemann-DGL lauten dann

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x \cos y) = \frac{\partial}{\partial y}(-\mathrm{e}^x \sin y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x \cos y) = -\frac{\partial}{\partial x}(-\mathrm{e}^x \sin y)$$

Die Ableitungen ausgewertet:

$$\mathrm{e}^x \cos y = -\mathrm{e}^x \cos y, \qquad -\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^x \sin y.$$

Die Cauchy-Riemann-DGL werden genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Im} z$ eine Nullstelle des Sinus und des Cosinus ist. Solche Nullstellen gibt es nicht.

Die Funktion $\exp \bar{z}$ ist nirgend in der komplexen Ebene komplex differenzierbar.

b) Es ist zunächst

$$\int_{|z|=1} \exp \bar{z} \, \mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \exp z^{-1} \, \mathrm{d}z$$

Die Funktion $\exp z^{-1}$ hat genau für $z = 0$ eine isolierte Singularität und ist sonst überall analytisch. Der Residuensatz ergibt also

$$\int_{|z|=1} \exp z^{-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}\left(\exp z^{-1}, 0\right).$$

Das Residuum an der Stelle 0 lässt sich an der Laurent-Reihenentwicklung feststellen:

$$\exp z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}.$$

Der Koeffizient bei z^{-1} ist das gesuchte Residuum:

$$\operatorname{Res}\left(\exp z^{-1}, 0\right) = \frac{1}{1!} = 1.$$

Somit gilt

$$\int_{|z|=1} \exp \bar{z} \, \mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \exp z^{-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}\left(\exp z^{-1}, 0\right) = 2\pi\mathrm{i} \cdot 1 = 2\pi\mathrm{i}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Der Integrand ist analytisch auf der punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Funktion $-\frac{1}{z}$ ist dort eine Stammfunktion für $\frac{1}{z^2}$.

Der Kreisbogen läuft vom Punkt i zum Punkt 1.

Damit ist

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{z}\right]_{z=\mathrm{i}}^{z=1} = -1 - \left(-\frac{1}{\mathrm{i}}\right) = -1 - \mathrm{i}.$$

b) Es muss ein „verschobener“ oder „gedrehter“ Logarithmus aufgefunden werden, dessen Schlitz nicht den Kreisbogen $\mathcal{C}$ schneidet. Wir legen den Schlitz auf den Strahl vom Punkt 0 durch den Punkt $1+\mathrm{i}$. Dann liegt der Kreisbogen $\mathcal{C}$ vollständig im Schlitzgebiet $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \geq 0\}$. (Skizze genügt.)

Auf diesem Schlitzgebiet ist $\ln\left(-\frac{z}{1+\mathrm{i}}\right)$ eine Stammfunktion für $\frac{1}{z}$.

(Für jede komplexe Zahl γ mit $\operatorname{Re}\gamma > 0$ und $\operatorname{Im}\gamma > 0$ ist die Funktion $\ln(-\gamma^{-1}z)$ eine geeignete Stammfunktion.)

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \left[\ln\left(-\frac{z}{1+\mathrm{i}}\right)\right]_{z=\mathrm{i}}^{z=1} \\
&= \ln\left(-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right) - \ln\left(-\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = \ln\left(-\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right) - \ln\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right) \\
&= \ln\frac{1}{2} + \mathrm{i}\arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) - \left(\ln\frac{1}{2} + \mathrm{i}\arg\left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) \\
&= \mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Das Integral hat den Wert $\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}$.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Die Ableitung ist $(z+1)\mathrm{e}^z$ und ist für $z=0$ von Null verschieden, damit ist die Funktion $z\mathrm{e}^z$ am Punkt 0 winkeltreu.

b) Falsch.

α) Mit $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ hat man $a=c=0$ und $b=d$, somit $ad-bc=0$, was der Bedingung $ad-bc\neq 0$ widerspricht.

$\beta,\ldots$) keine Bijektivität; Kreise und Geraden immer nur auf einen Punkt abgebildet;...

c) Falsch.
Nach der Definition gilt

$$\mathcal{Z}[(1,0,0,0,0,\ldots)](z)=1\cdot z^{-0}+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-1}+\ldots=1.$$

Hingegen gilt $\mathcal{Z}[(0,1,0,0,0,\ldots)](z)=\frac{1}{z}$.

d) Wahr.
Es gilt $p(\mathrm{i}t)=(1+\mathrm{i}t)^2=1-t^2+2\mathrm{i}t$. Die Nyquist-Kurve ist ein Teil einer nach links geöffneten Parabel und durchläuft für $0<t<1$ den ersten und für $1<t<\infty$ den zweiten Quadranten und verbleibt dort. Die Anzahl der durchlaufenen Quadranten ist gleich zwei.

Nach dem Nyquist-Kriterium ist das Polynom $(z+1)^2$ also stabil.

e) Wahr.
In Matrixform hat man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Die Systemmatrix ist eine Dreiecksmatrix; damit liest man -1 als doppelten Eigenwert ab. Dieser Eigenwert hat negativen Realteil, damit ist der GGP asymptotisch stabil.