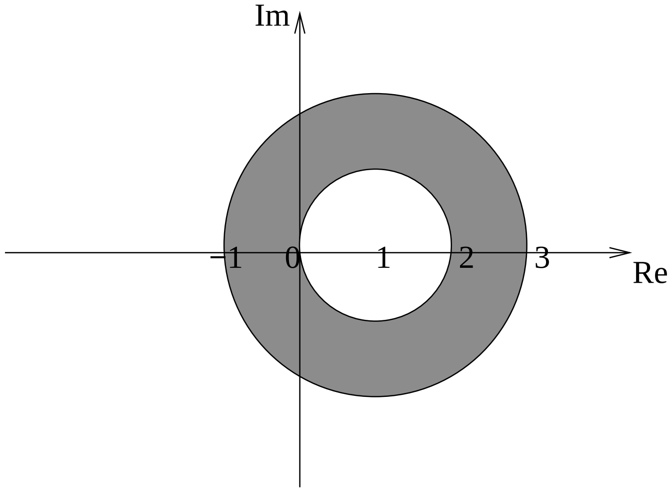
Musterlösung
Analysis III für Ingenieurwissenschaften, 20. Juli 2015

1. Aufgabe

9 Punkte

Das Ringgebiet wird eingegrenzt durch die Polstellen -1 und 2, die von der Entwicklungsstelle den Abstand 2 bzw. 1 haben. Damit handelt es sich um den Kreisring $1 < |z-1| < 2$, in welchem eine Laurent-Reihe ermittelt werden soll.



Es ist

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{2+(z-1)}$$

$$= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{-n-1}(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{-n-1}(z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{-n-1}(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n<0 \\ (-2)^{-n-1} & \text{für } n \geq 0 \end{cases}.$$

Beim 4. Gleichheitszeichen wurden bei der Entwicklung in unendliche Reihen die Konvergenzbedingungen $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ und $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$ verwendet, die genau im Kreisring $1 < |z-1| < 2$ erfüllt werden.

2. Aufgabe

11 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{4+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{|z|=1} \frac{-\mathrm{i}z^{-1}}{4+\frac{z+z^{-1}}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=1} \frac{-2\mathrm{i}z^{-1}}{8+z+z^{-1}}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=1} \frac{-2\mathrm{i}}{z^2+8z+1}\,\mathrm{d}z \\
&= -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+8z+1}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Der Integrand hat $-4+\sqrt{15}$ und $-4-\sqrt{15}$ als Polstellen 1. Ordnung. Davon liegt nur $-4+\sqrt{15}$ innerhalb der Integrationskurve. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+8z+1}, -4+\sqrt{15}\right) \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \left.\frac{1}{2z+8}\right|_{z=-4+\sqrt{15}} \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \frac{1}{-8+2\sqrt{15}+8} \\
&= -2\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \frac{1}{2\sqrt{15}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.
\end{aligned}$$

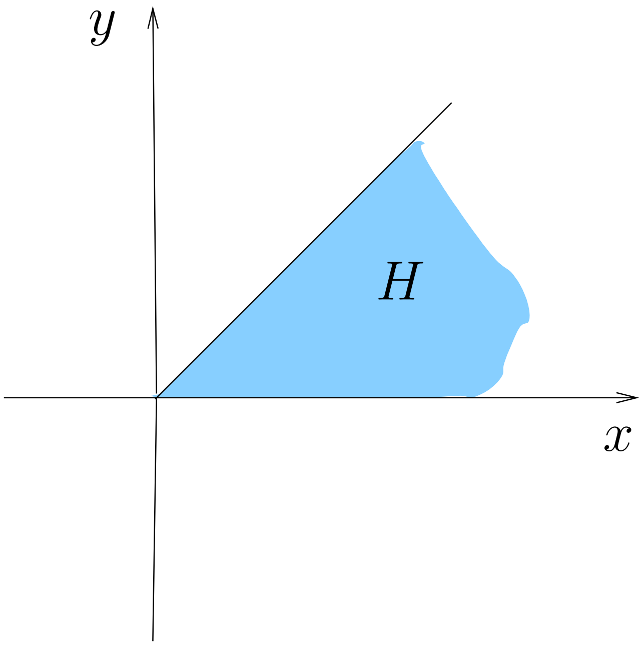
b) Die Nullstellen des Nenners sind $-1+2\mathrm{i}$ und $-1-2\mathrm{i}$, beide sind einfach und liegen nicht auf der reellen Achse. Der Zählergrad ist um zwei Einheiten kleiner als der Nennergrad. Es hat nur die erstgenannte Nullstelle einen positiven Imaginärteil.

Es gilt

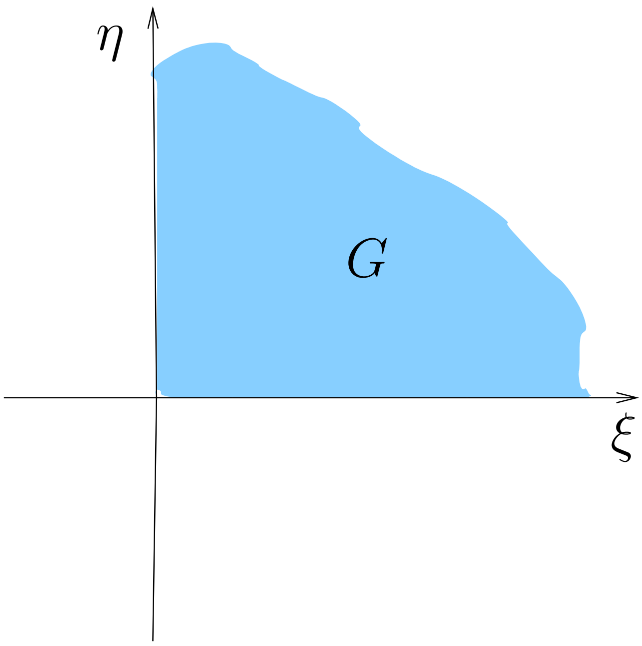
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2z+5}, -1+2\mathrm{i}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{1}{2z+2}\right|_{z=-1+2\mathrm{i}}\right) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{-2+4\mathrm{i}+2} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte



a)



Das Winkelgebiet H wird gleichwertig auch durch $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ beschrieben. Mit $z = re^{i\varphi}$ gilt $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Damit ist das Bildgebiet $f(H)$ die Punktmenge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$, also gerade der I. Quadrant.

b) Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ist $z^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i} \cdot 2xy$. Damit gilt $(x, 0) \mapsto (x^2, 0)$ und $(x, x) \mapsto (0, 2x^2)$. Der Punkt $(\xi, 0) \in G$ hat also das Urbild $(\sqrt{\xi}, 0)$, und der Punkt $(0, \eta) \in G$ das Urbild $(0, \sqrt{\frac{1}{2}\eta})$.

Somit muss U das folgende RWP lösen:

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi, \eta) &= 0 \quad \text{für} \quad (\xi, \eta) \in G \\ U(\xi, 0) &= 2\xi \quad \text{für} \quad \xi \geq 0, \\ U(0, \eta) &= \frac{1}{2}\eta \quad \text{für} \quad \eta \geq 0. \end{aligned}$$

c) Mit dem Ansatz $U(\xi, \eta) = A\xi + B\eta$ findet man leicht $A = 2$ und $B = \frac{1}{2}$. Somit ist

$$U(\xi, \eta) = 2\xi + \frac{1}{2}\eta$$

die Lösung des verpflanzten RWPs.

d) Es gilt $u = U \circ f$, folglich ist

$$u(x, y) = U(x^2 - y^2, 2xy) = 2(x^2 - y^2) + xy$$

die Lösung des ursprünglich vorgegebenen RWPs.

Bei fehlender Lösung von c):
Es gilt $u = U \circ f$, folglich ist

$$u(x, y) = U(x^2 - y^2, 2xy) = A(x^2 - y^2) + Bxy$$

die Lösung des ursprünglich vorgegebenen RWPs.

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Der I. Quadrant wird von der positiven reellen und von der positiven imaginären Achse begrenzt. Diese Achsen schneiden sich in 0 und in ∞. Diese Schnittpunkte werden auf die Schnittpunkte des Halbkreises mit der reellen Achse abgebildet. Es gilt also $T(\{0, \infty\}) = \{-1, 1\}$.

Wir nehmen an, dass $T(0) = 1$ und $T(\infty) = -1$ zusammen mit $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ gelte. Dann wird die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse auf den im positiven Sinn durchlaufenen Halbkreis abgebildet. Der I. Quadrant, der zur Rechten der imaginären Achse liegt, wird jedoch in das Außengebiet des Halbkreises abgebildet. Damit muss unsere Annahme verworfen werden.

Also muss $T(0) = -1$ und $T(\infty) = 1$ gelten bei $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$. Nach dem Sechs-Punkte-Satz ist die Möbius-Transformation T dann eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Genau genommen haben wir nur bewiesen, dass die Möbius-Transformation T die Eigenschaften $T(0) = -1$, $T(\infty) = 1$ und $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ notwendig besitzt, *sofern* es überhaupt eine solche Transformation T gibt, die den I. Quadranten in die obere Halbkreisscheibe überführt. Was fehlt, ist der Nachweis, dass die durch diese „sechs Punkte“ bestimmte Möbius-Transformation tatsächlich den I. Quadranten in die obere Halbkreisscheibe überführt.

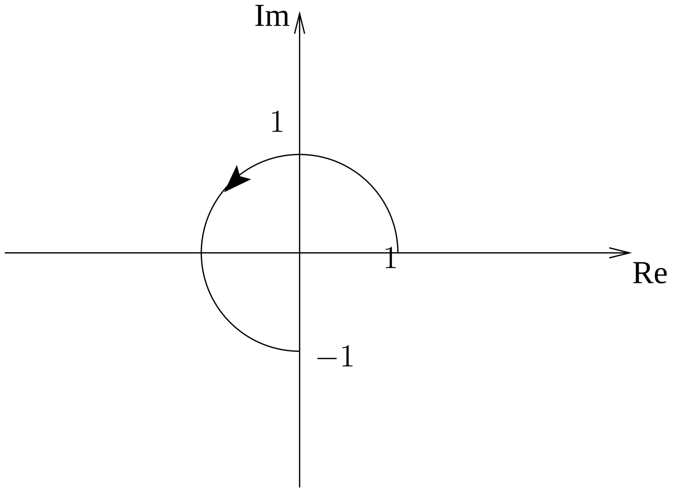
b) Mit $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt dann folgende Rechnung

$$T(0) = -1 \implies d = -b$$
$$T(\infty) = 1 \implies a = c$$
$$\implies T(z) = \frac{az+b}{az-b}$$
$$T(\mathrm{i}) = \mathrm{i} \implies a\mathrm{i} + b = (a\mathrm{i} - b)\mathrm{i} \implies a\mathrm{i} + b = -a - b\mathrm{i} \implies a(1+\mathrm{i}) = b(-1-\mathrm{i})$$
$$\text{wähle } a = 1, b = -1 \text{ (T ist ohnehin eindeutig bestimmt!)}$$
$$\implies T(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a)



b) b1) Es ist

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{2}\mathrm{i}.$$

b2) Geeignete Stammfunktionen sind die Funktionen $\log \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da die Kurve $\mathcal{C}$ ein Dreiviertelhalbkreis ist, der über die ersten drei Quadranten läuft, muss der Schlitz von $\log \alpha z$ im vierten Quadranten liegen. Wir wählen den Strahl $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $r \in \mathbb{R}^+$ als den Schlitz von $\log \alpha z$. Damit setzen wir $\alpha = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -1 - \mathrm{i}$.
Die Funktion $\log(-1-\mathrm{i})z$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf der komplexen, im Strahl $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $r \in \mathbb{R}^+$, eingeschlitzten Ebene.

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \big[\log(-1-\mathrm{i})z\big]_{z=1}^{z=-\mathrm{i}} &= \log\left((-1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})\right) - \log(-1-\mathrm{i}) \\ &= \log(-1+\mathrm{i}) - \log(-1-\mathrm{i}) \\ &= (\ln|-1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(-1+\mathrm{i})) - (\ln|-1-\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(-1-\mathrm{i})) \\ &= \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) - \left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.

α) Die Funktion $\mathrm{e}^x \sin y$ ist der Imaginärteil der analytischen Funktion e^z bei $z = x + \mathrm{i}y$ (Eulersche Identität). Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonisch, damit ist $\mathrm{e}^x \sin y$ harmonisch.

β) Wir können's auch nachrechnen:

$$\Delta(\mathrm{e}^x \cos y) = \frac{\partial^2(\mathrm{e}^x \cos y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mathrm{e}^x \cos y)}{\partial y^2}$$
$$= \frac{\partial^2(\mathrm{e}^x)}{\partial x^2} \cos y + \mathrm{e}^x \frac{\partial^2(\cos y)}{\partial y^2} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^x(-\cos y) = 0.$$

Stümmt.

b) Wahr.
Die Ableitung von $\log z$ ist gleich $\frac{1}{z}$, und diese Ableitung ist stets von Null verschieden, damit ist $\log z$ auf dem Schlitzgebiet eine konforme Abbildung.

c) Falsch.
Die begrenzenden Geraden $\operatorname{Re} z = 1$ und $\operatorname{Re} z = 2$ schneiden sich in einem Punkt (nämlich in ∞), während die begrenzenden Kreise $|z| = 1$ und $|z| = 2$ sich gar nicht schneiden. Schnittpunkte werden aber stets in Schnittpunkte überführt.

d) Wahr.
Für $r < \pi$ ist der Integrand $\frac{\sin z}{z-\pi}$ analytisch auf der offenen Kreisscheibe $|z| < \frac{r+\pi}{2}$, die einfach zusammenhängend ist und die Integrationskurve $|z| = r$ umfasst. (Insbesondere ist die Polstelle π nicht enthalten.) Damit ist nach CIS (1. Version) das Integral Null.

Für $r > \pi$ ist die Integrationskurve $|z| = r$ der Rand ∂B des abgeschlossenen Kreisscheibe B mit $B := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$ und ist der Punkt π ein innerer Punkt von B.

Weiter ist $\sin z$ analytisch auf jedem Gebiet G, das den Bereich B umfasst, z.B. die offene Kreisscheibe $|z| < 2r$ oder gleich ganz $\mathbb{C}$.

Mit CIF ist dann das Integral gleich $2\pi\mathrm{i} \cdot \sin \pi$ und damit gleich Null.

e) Wahr.
Wegen

$$\frac{\mathrm{e}^{z^2} - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2(n-1)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+1)!}$$

hat die Laurent-Reihe von $\frac{\mathrm{e}^{z^2}-1}{z^2}$ um 0 einen verschwindenden Hauptteil. Damit ist die Singularität 0 hebbar.