Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
A. Gündel-vom Hofe 09. Oktober 2015

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie für die Funktion $\dfrac{3}{z(z-3)}$ eine Laurent-Reihe um die Stelle $z_0 = 1$, welche in einem Ringgebiet A mit endlichen Innen- und Außenradien und Mittelpunkt z_0 konvergiert. Skizzieren Sie den in Frage kommenden Kreisring A und machen Sie in Ihrer Rechnung kenntlich, wo Sie welche Konvergenzbedingungen einbringen.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur die folgenden Schreibweisen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}$$

$$\text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}.$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$ (5 Punkte) und b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ (6 Punkte).

Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

Für Aufgaben 3-6 bitte
2. und 3. Blatt beachten!

3. Aufgabe

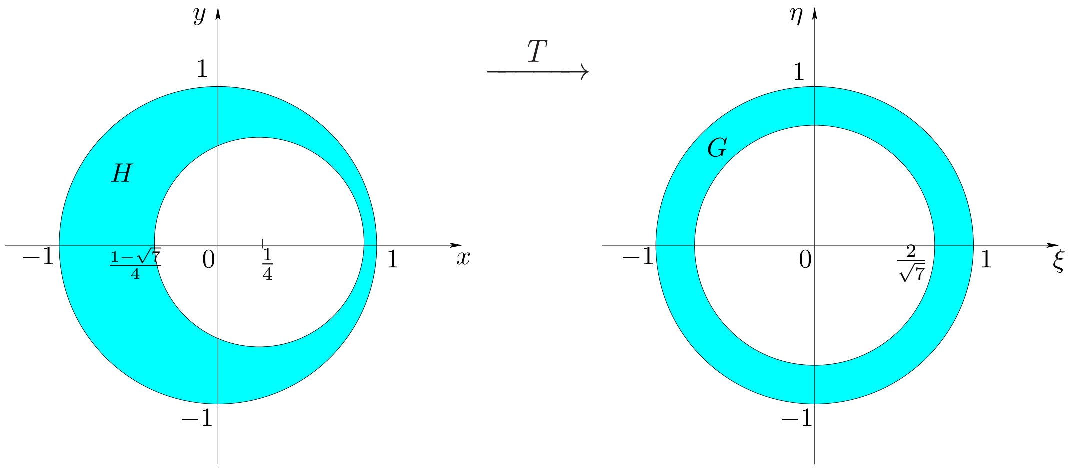
10 Punkte

Gegeben sind die Möbiustransformation T mit $T(z) = \dfrac{2z-1}{z-2}$ und die skizzierten Gebiete H und G, die wie folgt erklärt sind:

$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1 \text{ und } \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 > \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \right\},$$

$$G = \left\{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 < \xi^2+\eta^2 < 1 \right\}.$$

Die Möbius-Transformation T bildet das Gebiet H auf das Gebiet G ab:



a) Bestätigen Sie durch eine kleine Rechnung und Rückgriff auf geeignete Sätze über Möbius-Transformationen, dass die Möbius-Transformation T den im positiven Drehsinn durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowleft$ auf sich selbst abbildet: $T(\circlearrowleft) = \circlearrowleft$.

b) Gegeben ist das Randwertproblem in H

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{für } (x,y) \in H, \\ &u(x,y) = 1 \quad \text{für } \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2, \qquad (*) \\ &u(x,y) = 0 \quad \text{für } x^2+y^2 = 1. \end{aligned}$$

α) Stellen Sie das Randwertproblem für die Funktion U mit $U = u \circ T^{-1}$ auf dem Bildgebiet G auf.

β) Lösen Sie das Randwertproblem aus α) für U mit Hilfe des Ansatzes $U(\xi,\eta) = A\ln(\xi^2+\eta^2) + B$.

γ) Ermitteln Sie dann die Lösung $u(x,y)$ des ursprünglichen Randwertproblems $(*)$.

Hinweise: Benutzen Sie $|T(x+\mathrm{i}y)|^2 = \xi^2+\eta^2$.

Beachten Sie auch die Rechenregel $\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|^2 = \dfrac{|az+b|^2}{|cz+d|^2}$.

Bitte Rückseite und 3. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die komplexe Funktion f mit

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z(z-1)^2}.$$

a) Bestimmen Sie Lage und Art der Singularitäten von f.

b) Ermitteln Sie den Wert des Integrals

$$\int\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Potenzreihenentwicklung $\mathrm{e}^z = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das komplexe Integral über den positiv durchlaufenen Einheitskreis

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z. \qquad (**)$$

a) Berechnen Sie das Integral (**) als Parameterintegral.

b) Gegeben seien zwei Halbkreise K_1 und K_2 mit Radius 1 und Mittelpunkt 0, dabei laufen der Halbkreis K_1 von $-\mathrm{i}$ nach i und der Halbkreis K_2 von i nach $-\mathrm{i}$.

Berechnen Sie die Summe

$$\int\limits_{K_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{K_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

mit Hilfe von Stammfunktionen und vergleichen Sie mit dem Integral (**).

Für Aufgabe 6 bitte 3. Blatt beachten!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die Funktionen $u(x, y) = x \cos y$ und $v(x, y) = y \sin x$ sind Real- bzw. Imaginärteil ein- und derselben auf ganz $\mathbb{C}$ analytischen Funktion $f(z)$ (d.h. $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$).

b) Die komplexe Funktion e^{2z} stellt für alle $z \in \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung dar.

c) Es gibt eine Möbius-Transformation T, die den positiv durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowleft$ auf den negativ durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowright$ abbildet und den Punkt 0 als Fixpunkt hat: $T(\circlearrowleft) = \circlearrowright$ und $T(0) = 0$.

d) Es gilt
$$\int_{|z|=5} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z - \pi} \, \mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}.$$

e) Der Gleichgewichtspunkt $(2, 2)$ des dynamischen Systems
$$\dot{x} = (x - 2)(y - 3), \qquad \dot{y} = (x - 4)(y - 2)$$
ist asymptotisch stabil.