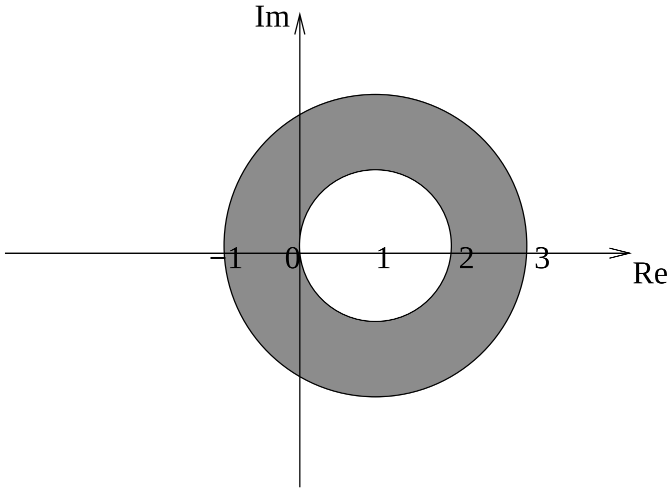
Musterlösung
Analysis III für Ingenieurwissenschaften, 09. Oktober 2015

1. Aufgabe

9 Punkte

Das Ringgebiet wird eingegrenzt durch die Polstellen 0 und 3, die von der Entwicklungsstelle 1 den Abstand 1 bzw. 2 haben. Damit handelt es sich um den Kreisring $1 < |z-1| < 2$, in welchem eine Laurent-Reihe ermittelt werden soll.



Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{z(z-3)} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{(z-1)+1} + \frac{1}{(z-1)-2} \\
&= -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1}\right)^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}(z-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2^{-n-1}\right)(z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2^{-n-1}\right)(z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } n < 0 \\ -2^{-n-1} & \text{für } n \geq 0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Beim 4. Gleichheitszeichen wurden bei der Entwicklung in unendliche Reihen die Konvergenzbedingungen $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ und $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$ verwendet, die genau im Kreisring $1 < |z-1| < 2$ erfüllt werden.

2. Aufgabe

11 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{(2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{|z|=1} \frac{(2+z)(-\mathrm{i}z^{-1})}{2-z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{i}(2+z)}{z^2-2z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{i}(2+z)}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Der Integrand hat 0 und 2 als Polstellen 1. Ordnung. Nur die Polstelle 0 liegt innerhalb der Integrationskurve. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{i}(2+z)}{z^2-2z}, 0\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{\mathrm{i}(2+z)}{2z-2}\right|_{z=0}\right) = 2\pi\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}) = 2\pi.\end{aligned}$$

Man kommt auch mit CIF auf das Ergebnis:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{i}(2+z)}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{\frac{\mathrm{i}(2+z)}{z-2}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{i}(2+z)}{z-2}\right)\Big|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}) = 2\pi.$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind i, −i, 2i und −2i. Sie sind alle einfach und liegen nicht auf der reellen Achse. Der Zählergrad ist um zwei Einheiten kleiner als der Nennergrad. Es haben nur die Nullstellen i und 2i einen positiven Imaginärteil.

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, \mathrm{i}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2\mathrm{i}\right)\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{z^2}{2z\cdot(z^2+4)}\right|_{z=\mathrm{i}} + \left.\frac{z^2}{(z^2+1)\cdot 2z}\right|_{z=2\mathrm{i}}\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}\cdot 3} - \frac{4}{(-3)\cdot 4\mathrm{i}}\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Wir wählen als Urbilder die Punkte 1, i und -1 und erhalten durch Einsetzen

$$T(1) = -1, \qquad T(\mathrm{i}) = \frac{2\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}-2} = \frac{(-1+2\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{5} = \frac{-4-3\mathrm{i}}{5}, \qquad T(-1) = 1.$$

Es gilt $|T(1)| = |T(\mathrm{i})| = |T(-1)| = 1$: Die Bildpunkte liegen auf dem Einheitskreis.

Die Reihenfolge $1 \to \mathrm{i} \to -1$ der Urbilder entspricht dem positiven Durchlaufssinn $\circlearrowleft$. Die Reihenfolge $-1 \to \frac{-4-3\mathrm{i}}{5} \to 1$ der Bilder weist einen positiven Durchlaufssinn $\circlearrowleft$ auf.

Damit wird der positiv durchlaufene Einheitskreis auf sich selbst (unter Wahrung des Durchlaufssinns) abgebildet.

b) α) Der Einheitskreis wird unter T auf sich selbst abgebildet, so dass das „andere“ Randstück von H, nämlich der Kreis $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$ auf den Kreis $\xi^2+\eta^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2$ abgebildet wird. Für $U(\xi,\eta)$ ist damit das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für} \quad (\xi,\eta) \in G \\ U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 = 1, \\ U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 \end{aligned}$$

zu lösen.

β) Mit dem Ansatz $U(\xi,\eta) = A\ln(\xi^2+\eta^2) + B$ findet man

$$\begin{aligned} &\xi^2+\eta^2 = 1: \quad 0 = U(\xi,\eta) = B \implies B = 0 \\ &\xi^2+\eta^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2: \quad 1 = U(\xi,\eta) = A\ln\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 \implies A = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{1}{\ln\frac{4}{7}}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$U(\xi,\eta) = \frac{\ln(\xi^2+\eta^2)}{\ln\frac{4}{7}}$$

die Lösung des verpflanzten RWPs.

γ) Es gilt $u = U \circ T$, folglich ist

$$\begin{aligned} u(x,y) = U(\operatorname{Re} T(x+\mathrm{i}y), \operatorname{Im} T(x+\mathrm{i}y)) &= \frac{\ln(|T(x+\mathrm{i}y)|^2)}{\ln\frac{4}{7}} \\ = \frac{1}{\ln\frac{4}{7}} \ln\frac{|2(x+\mathrm{i}y)-1|^2}{|x+\mathrm{i}y-2|^2} &= \frac{1}{\ln\frac{4}{7}} \ln\frac{(2x-1)^2+4y^2}{(x-2)^2+y^2} \end{aligned}$$

die Lösung des ursprünglich vorgegebenen RWPs.

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Die Definitionslücken sind hier die Nullstellen des Nenners, also 0 und 1.

Für die Stelle 0 schreiben wir

$$\frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} = \frac{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z(z-1)^2} = \frac{z\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \cdots\right)}{z(z-1)^2}$$
$$= \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots}{(z-1)^2}$$

Für $z = 0$ ist im letzten Bruch der Nenner nicht gleich Null, damit ist die Singularität 0 eine hebbare Singularität.

Alternativen: Benutzung der Hilfsformel „$\frac{g(z)}{h'(z)}$“ bei Residuenberechnung; Berechnung der Nullstellenordnungen von $e^z - 1$ und von $z(z-1)^2$.

Für die Stelle 1 schreiben wir

$$\frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} = \frac{\frac{e^z - 1}{z}}{(z-1)^2}$$

Für $z = 1$ ist der Zähler ungleich Null, aber der Nenner hat dort eine doppelte Nullstelle. Damit ist 1 eine Polstelle 2. Ordnung.

b) Innerhalb des Kreises $|z+1| = \frac{3}{2}$ liegt nur die Singularität 0. Da sie bereits als hebbare Singularität klassifiziert wurde, ist das Residuum von f an dieser Stelle gleich Null. Somit haben wir

$$\int_{|z+1|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 0.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit der Parametrisierung $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t < 2\pi$, findet man

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) Stammfunktionen von $\frac{1}{z}$ sind von der Form $\log \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Für K_1 setzen wir $\alpha = 1$. Die Kurve K_1 liegt vollständig im Definitionsbereich von $\log z$, da dessen Schlitz auf der nicht-positiven reellen Achse liegt, die von K_1 gar nicht geschnitten wird.

Für K_2 setzen wir $\alpha = -1$. Die Kurve K_2 liegt vollständig im Definitionsbereich von $\log(-z)$, da dessen Schlitz auf der nicht-negativen reellen Achse liegt, die von K_2 gar nicht geschnitten wird.

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int_{K_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{K_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= [\log z]_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} + [\log(-z)]_{\mathrm{i}}^{-\mathrm{i}} \\ &= \log \mathrm{i} - \log(-\mathrm{i}) + \log \mathrm{i} - \log(-\mathrm{i}) = 2(\log \mathrm{i} - \log(-\mathrm{i})) \\ &= 2\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathrm{i}\pi.\end{aligned}$$

Die Summe der Halbkreisintegrale muss gleich dem Integral (∗∗) sein, da die Halbkreise K_1 und K_2 sich genau zum positiv durchlaufenen Einheitskreis ergänzen.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ erfüllen nicht einmal eine Cauchy-Riemann-DGL auf ganz $\mathbb{R}^2$: Mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x$$

ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ falsch z.B. für $(x, y) = (0, 0)$. Somit ist $f(z)$ sicherlich nicht auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

b) Wahr.
Die Ableitung von e^{2z} ist gleich $2\mathrm{e}^{2z}$ und auf ganz $\mathbb{C}$ von Null verschieden. Damit stellt e^{2z} auf ganz $\mathbb{C}$ eine konforme Abbildung dar.

c) Falsch.
Der Punkt 0 liegt zur Linken von $\circlearrowleft$ und zugleich zur Rechten von $\circlearrowright$. Die Transformation T ist nicht orientierungstreu und kann somit keine Möbius-Transformation sein.

d) Wahr.
Die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Der Punkt π liegt innerhalb des Kreises $|z| = 5$. Mit CIF bekommt man deshalb

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z - \pi} \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2\pi\mathrm{i}.$$

e) Wahr.
Für die Jacobi-Matrix am Punkt $(2, 2)$ hat man

$$\mathcal{J}(2,2) = \begin{pmatrix} y-3 & x-2 \\ y-2 & x-4 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(2,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind -1 und -2. Da alle Eigenwerte negativen Realteil haben, ist der Gleichgewichtspunkt $(2, 2)$ asymptotisch stabil.