Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2016
01.08.2016

August – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	Σ

Verständnisteil:

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 - 2z}.$$

(i) Bestimmen Sie Art und Lage der Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $z_0 = -2$ alle möglichen Laurententwicklungen und geben sie den zugehörigen Konvergenzbereich der Reihe an.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur Schreibweisen die den Hauptteil bzw. den Nebenteil als Reihe der folgenden Form darstellen.

$$\sum(\cdots)(z - z_0)^{-k} \quad \text{oder} \quad \sum(\cdots)(z - z_0)^k.$$

2. Aufgabe 7 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+1} + 2y_k = 3, \quad y_0 = 1,$$

mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation.

3. Aufgabe 12 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden DGL-Systeme jeweils die Gleichgewichtspunkte und die zugehörigen Stabilitätseigenschaften.

(i) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, (ii) $\begin{cases} \dot{x} = -4x^2 - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$.

Verständnisteil

4. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = \frac{(z-1)^2}{z}.$$

(i) Ist f eine konforme Abbildung? In welchen Punkten erhält f die Schnittwinkel?

(ii) Bestimmen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int\limits_{|z|=1} f(z)\ dz, \qquad \text{(b)} \int\limits_{|z|=2} \sin(z) f(z)\ dz, \qquad \text{(c)} \int\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\ dz.$$

5. Aufgabe 10 Punkte

Es sei T die Möbiustransformation mit den folgenden Eigenschaften

* $T(2i) = \infty$,
* Die imaginäre Achse, von unten nach oben durchlaufen, wird wieder auf die imaginäre Achse mit entgegengesetztem Durchlaufsinn abgebildet.
* Die reelle Achse wird auf den Einheitskreis abgebildet.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Vorschrift $T(z)$.

(ii) Worauf wird die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ abgebildet? Begründen Sie ihre Antwort!

6. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sind die Menge $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}$ und das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in G, \\ u(x,0) = 5x^2, & x > 0, \\ u(x,x) = 6x^2, & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

auf $\overline{G} := G \cup \partial G$. Nutzen Sie die Funktion $f(z) = z^2$ und lösen Sie das oben genannte Randwertproblem mit Hilfe der Verpflanzung.

(i) Bestimmen Sie die Menge $f(G)$ und stellen Sie das zugehörige Randwertproblem für die verpflanzte Funktion $\widetilde{u}$ in $f(G)$ auf.

(ii) Berechnen Sie die Lösung des ursprünglichen RWPs (1).