Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SS 16
01.08.2016

August – Klausur
Analysis III für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2-4}{z^2-2z}.$$

(i) Bestimmen Sie Art und Lage der Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $z_0 = -2$ alle möglichen Laurententwicklungen und geben sie den zugehörigen Konvergenzbereich der Reihe an.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur Schreibweisen die den Hauptteil bzw. den Nebenteil als Reihe der folgenden Form darstellen.

$$\sum(\cdots)(z-z_0)^{-k} \quad \text{oder} \quad \sum(\cdots)(z-z_0)^k.$$

Es gilt $f(z) = \frac{z^2-4}{z^2-2z} = \frac{z+2}{z}$

(i) Singularitäten der Funktion liegen in den Nullstellen des Nenners, d.h. in $z_0 = 0$ und $z_1 = 2$.

z_0 ist ein einfacher Pol , da $\lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = 2$ existiert, aber $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ gilt.
z_1 ist eine hebbare Singularität, da der Grenzwert $\lim_{z\to 2} f(z) = 2$ existiert.

(ii) Betrachten wir die Reihenentwicklung um $z = -2$ gibt es nur die Problemstelle z_0 bzgl. derer wir eine Unterscheidung des Konvergenzbereiches vornehmen müssen. Die beiden verschiedenen Konvergenzbereiche werden $|z+2| < 2$ und $|z+2| > 2$ sein. Zur Berechnung der Reihe ziehen wir den bereits gekürzten Ausdruck von $f(z)$ heran. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{z} &= (z+2)\frac{1}{z+2-2} = -\frac{(z+2)}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}\\ &= -\frac{z+2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^k = \underline{\underline{-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k (z+2)^k}}\end{aligned}$$

Diese Reihe ist die Darstellung von f auf dem Bereich $|z+2| < 2$. Analog gilt für den anderen Bereich $|z+2| > 2$

$$\frac{z+2}{z} = (z+2)\frac{1}{z+2-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{z+2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+2}\right)^k = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z+2)^{-k}}}.$$

2. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+1} + 2y_k = 3, \quad y_0 = 1,$$

mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation.

Die $\mathcal{Z}$-transformierte Gleichung lautet

$$
\begin{aligned}
 & z(Y(z)-1) + 2Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3z^{-k} = \frac{3}{1-\frac{1}{z}} = \frac{3z}{z-1} \\
\Rightarrow\quad & (z+2)Y(z) = \frac{3z}{z-1} + z = \frac{2z+z^2}{z-1} = \frac{z(z+2)}{z-1} \\
\Rightarrow\quad & Y(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k}}}.
\end{aligned}
$$

Aus der Darstellung lesen wir die Koeffizienten ab, es ist also $\underline{\underline{y_k = 1}}$.

3. Aufgabe

12 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden DGL-Systeme jeweils die Gleichgewichtspunkte und die zugehörigen Stabilitätseigenschaften.

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}, \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -4x^2 - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

(i) Die resultierende Systemmatrix ist $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Da A invertierbar ist, ist $\operatorname{kern}(A) = \{\vec{0}\}$, d.h. $\vec{x}' = A\vec{x} = \vec{0}$ nur für den Vektor $\vec{x} = (0,0)^T$. Dies ist also der einzige Gleichgewichtspunkt.

Das zugehörige charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$. Seine Nullstellen sind $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ und $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$.

Einer der Eigenwerte ist positiv, somit liegt in $(0,0)$ ein instabiles Gleichgewicht vor.

(ii) Das zweite System ist nichtlinear.

- Gleichgewichtspunkte: Es muss also gelten

$$\begin{pmatrix} -4x^2 - y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt also $y = x$, dies eingesetzt in die erste Gleichung liefert

$$-4x^2 - x = x(-4x - 1) = 0.$$

Die beiden Gleichgewichtspunkte sind also $\vec{x}_0 = (0,0)$, $\vec{x}_1 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

- Stabilität: Wir nutzen das Prinzip der Linearisierung. Sei

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} -4x^2 - y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} -8x & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

In $\underline{(0,0)}$ gilt

$$F'(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}.$$

Somit liegen zwei komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil vor. Das Gleichgewicht ist also asymptotisch stabil.
In $\underline{(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})}$ gilt

$$F'(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}, \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1}.$$

Somit ist der Realteil des ersten Eigenwerts positiv und das Gleichgewicht somit instabil.

---

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = \frac{(z-1)^2}{z}.$$

(i) Ist f eine konforme Abbildung? In welchen Punkten erhält f die Schnittwinkel?

(ii) Bestimmen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \sin(z) f(z)\, dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\, dz$

(i) Es ist

$$f'(z) = \frac{2(z-1)z - (z-1)^2}{z^2} = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2}.$$

Die Ableitung ist also in den Punkten $z = 1$ und $z = -1$ gleich 0 und entsprechend in diesen Punkten nicht winkelerhaltend. In allen anderen Punkten des Definitionsbereiches $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Ableitung ungleich 0 und die Funktion somit winkelerhaltend.

(ii) a) 0 ist ein Pol erster Ordnung als einfache Nullstelle des Nenners, wobei der Zähler ungleich null ist. Somit folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), 0) = 2\pi i \cdot (-1)^2 = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

b) Da 0 nun sowohl einfache Nullstelle im Zähler als auch im Nenner ist, folgt (mit der Regel von l'Hospital) dass die einzige Singularität 0 eine hebbare Singularität ist. Somit ist

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = \underline{\underline{0}}.$$

c) Die einzige Singularität 0 ist nun ein Pol 2. Ordnung. Somit folgt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,dz &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z),0)\\ &= 2\pi i \cdot \left(z \cdot \frac{(z-1)^2}{z}\right)\Bigg|_{z=0} = 2\pi i \cdot 2(-1) = \underline{\underline{-4\pi i}}.\end{aligned}$$

---

5. Aufgabe

10 Punkte

Es sei T die Möbiustransformation mit den folgenden Eigenschaften

- $T(2i) = \infty$,
- Die imaginäre Achse, von unten nach oben durchlaufen, wird wieder auf die imaginäre Achse mit entgegengesetztem Durchlaufsinn abgebildet.
- Die reelle Achse wird auf den Einheitskreis abgebildet.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Vorschrift $T(z)$.

(ii) Worauf wird die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ abgebildet? Begrnden Sie ihre Antwort!

(i) Es ist $T(2i) = \infty$ und zwei weitere Wertepaare erhalten wir durch die Schnittpunkte von imaginärer und reeller Achse. Diese sind 0 und ∞. Die zugehörigen Funktionswerte sind die Schnittpunkte der Bildkurven, also i und $-i$. Dabei gilt:

Im Urbild werden die Punkte $(0, 2i, \infty)$ in dieser Reihenfolge durchlaufen, also müssen die Funktionswerte in der Reihenfolge $(T(0), T(2i), T(\infty))$ durchlaufen werden, wobei wir die Durchlaufrichtung von oben nach unten aus den Voraussetzungen entnehmen können.
Da $T(2i) = \infty$ gilt, folgt $T(0) = -i$ und $T(\infty) = i$.

Wir erhalten für $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} T(2i) = \infty & \Rightarrow & d = -2ic \\ T(0) = -i & \Rightarrow & b = -2c \\ T(\infty) = i & \Rightarrow & a = ci \end{array}\right\} \Rightarrow T(z) = \frac{ciz - 2c}{cz - 2ic} = \frac{iz - 2}{z - 2i}.$$

(ii) Die obere Halbebene muss entweder in den Einheitskreis oder auf das Äußere abbilden. Wählen wir den Punkt $z = 2i$, so liegt dieser in der oberen Halbebene, der Funktionswert ∞ liegt außerhalb des Kreises, d.h. die obere Halbebene wird auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ abgebildet.

6. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sind die Menge $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0\}$ und das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in G, \\ u(x,0) = 5x^2, & x > 0, \\ u(x,x) = 6x^2, & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

auf $\overline{G} := G \cup \partial G$. Nutzen Sie die Funktion $f(z) = z^2$ und lösen Sie das oben genannte Randwertproblem mit Hilfe der Verpflanzung.

(i) Bestimmen Sie die Menge $f(G)$ und stellen Sie das zugehörige Randwertproblem für die verpflanzte Funktion $\tilde{u}$ in $f(G)$ auf.

(ii) Berechnen Sie die Lösung des ursprünglichen RWPs (1).

(i) Es ist $f(G) = \left\{(x,y) = re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[\right\}$.

Aus den Randbedingungen

in $\overline{G}$	wird	in $\overline{f(G)}$
$u(x,0) = 5x^2$		$\tilde{u}(x^2,0) = 5x^2 \quad \Leftrightarrow \tilde{u}(x,0) = 5x, x > 0,$
$u(x,x) = 6x^2$		$\tilde{u}(0,2x^2) = 6x^2 \quad \Leftrightarrow \tilde{u}(0,y) = 3y, y > 0.$

Das neue RWP ist also

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, & \text{auf } f(G), \\ \tilde{u}(x,0) = 5x, & \text{für } x > 0, \\ \tilde{u}(0,y) = 3y, & \text{für } y > 0. \end{cases}$$

(ii) Die allgemeine Lösung ist offenbar die Linearkombination

$$\tilde{u}(x,y) = 5x + 3y.$$

Wegen

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

ist

$$u(x,y) = \tilde{u}\left(\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy)\right) = \underline{\underline{5(x^2-y^2) + 6xy}}.$$