Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 17
A. Gündel-vom Hofe 31. Juli 2017

Juli – Klausur
Analysis III f. Ing.

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Der Einheitskreis und die reelle Achse schneiden sich in den Punkte 1 und -1, damit gilt $T(\{-1,1\}) = \{-1,1\}$.

Wir betrachten irgendeinen Punkt z_0 auf der oberen Hälfte des Einheitskreises. Da er links von $\rightarrow$ liegt, liegt das Bild $T(z_0)$ ebenfalls auf der oberen Hälfte des Einheitskreises.

Anhand dieser Erkenntnisse kann nicht $T(\pm 1) = \pm 1$ gelten, da dann der Eigenschaft $T(\circlearrowleft) = \circlearrowleft$ widersprochen wird.

Andere Argumentation: Die reelle Achse wird beschrieben durch die drei Punkte $-1, 1, 3$. Das Bild wird dann beschrieben durch $T(-1), T(1), \frac{1}{3}$ und soll *dieselbe* Durchlaufsrichtung andeuten. Mit $T(\pm 1) = \pm 1$ kommt man aber zum Durchlauf $-1, 1, \frac{1}{3}$, was auf einen Kreis hinweist statt auf eine Gerade.

Folglich gilt $T(\pm 1) = \mp 1$.

Wir schreiben

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

und bestimmen vier Koeffizienten a, b, c und d. Explizit hat man

$$\begin{aligned}
T(1) = -1 &\implies \frac{a+b}{c+d} = -1 \implies a+b = -c-d, \\
T(-1) = 1 &\implies \frac{-a+b}{-c+d} = 1 \implies -a+b = -c+d
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition und Subtraktion $c = -b$ und $d = -a$.

Es ist also

$$T(z) = \frac{az+b}{-bz-a} = -\frac{az+b}{bz+a}.$$

Nun benutzen wir $T(3) = \frac{1}{3}$:

$$-\frac{3a+b}{3b+a} = \frac{1}{3} \implies -9a-3b = 3b+a \implies -10a = 6b \implies b = -\frac{5}{3}a$$

Somit ist die gesuchte Möbius-Transformation durch

$$T(z) = -\frac{az - \frac{5}{3}a}{-\frac{5}{3}az + a} = -\frac{3z-5}{-5z+3} = \frac{3z-5}{5z-3}$$

gegeben.

Kommentar:

Viele Teilnehmer waren sich sicher, $T(0) = \infty$ und $T(\infty) = 0$ annehmen zu können. Das „passt" auch zur Orientierungsumkehr des Einheitskreises $T(\circlearrowleft) = \circlearrowright$. Es passt aber nicht zu den anderen beiden Bedingungen. Man betrachte die Punkte 0, 3 und ∞ in dieser Reihenfolge. Die Bilder sind dann angeblich ∞, $\frac{1}{3}$ und 0; daraus folgt aber $T(\rightarrow) = \leftarrow$.

Aus $T(\circlearrowleft) = \circlearrowright$ kann man nur folgern, dass das Kreisinnere nach außen gekehrt wird. Der Punkt 0 landet irgendwo im Außengebiet, aber nicht zwingend auf dem Punkt ∞.

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{3+2\cos\varphi}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{3+z+z^{-1}}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1}\,\mathrm{d}z.$$

Das Polynom z^2+3z+1 hat die einfachen Nullstellen $\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})$. Nur die erstgenannte Nullstelle liegt innerhalb des Einheitskreises Damit gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+3z+1}\,\mathrm{d}z$$
$$= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+3z+1}, \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})\right)$$
$$= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2z+3}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})} = -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

b) Der Nenner hat die Nullstellen π und $-\pi$. Nur die Nullstelle π liegt innerhalb des Kreises $|z-1| = 3$. Damit gilt

$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}, \pi\right).$$

Die Ableitung des Nenners des Integranden ist gleich $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, was für $z = \pi$ von Null verschieden ist. Damit gilt

$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z^2}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}\right)\Big|_{z=\pi} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} = -2\pi^3.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Skizze eines Winkelgebiets im IV. Quadranten, begrenzt von x-Achse und II. Winkelhalbierender. *Ein Bildchen war verlangt.*

Die Verpflanzungsabbildung f entspricht im $\mathbb{R}^2$ der Abbildung

$$(x, y) \mapsto (-2xy, x^2 - y^2).$$

Der Randkurve $(t, 0)$ mit $0 < t < \infty$ entspricht in der Bildebene die Randkurve $(0, t^2)$.

Der Randkurve $(t, -t)$ mit $0 < t < \infty$ entspricht in der Bildebene die Randkurve $(2t^2, 0)$.

(Damit ist das Bild $f(H)$ der I. Quadrant.)

Für die Funktion U mit $U = u \circ f^{-1}$ gilt demnach

$$u(t, 0) = 2t^2 = U(0, t^2), \qquad u(t, -t) = t^2 = U(2t^2, 0).$$

Die Funktion U löst das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(x', y') &= 0 \quad \text{für } (x, y) \in f(H), \\ U(x', 0) &= \frac{1}{2}x' \quad \text{für } x' > 0 \\ U(0, y') &= 2y' \quad \text{für } y' > 0. \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$U(x', y') = Ax' + By'$$

findet man sofort $A = \frac{1}{2}$ und $B = 2$ und damit

$$U(x', y') = \frac{1}{2}x' + 2y'.$$

Mit $u = U \circ f$ findet man die Lösung des gestellten Randwertproblems:

$$u(x, y) = U(-2xy, x^2 - y^2) = -xy + 2(x^2 - y^2).$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt für $z \in A$:

$$e^{\frac{1}{(z-1)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!}(z-1)^{2n},$$

Die Stelle 1 ist eine wesentliche Singularität.

b) Es gilt für $z \in A$:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{1}{1-(z-1)}\right) = -\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)(z-1)^n.$$

Die Singularität ist eine Polstelle 1. Ordnung.

c) Es gilt für $z \in A$:

$$\frac{z(z-2)}{z-1} = \frac{((z-1)+1)((z-1)-1)}{z-1} = \frac{(z-1)^2-1}{z-1} = (z-1) - \frac{1}{z-1}.$$

Die Laurent-Reihe besitzt einen Hauptteil, der aber abbricht. Die Singularität 1 ist eine Polstelle 1. Ordnung.

d) Es gilt für $z \in A$:

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z+1 = 2+(z-1).$$

Diese Laurent-Reihe hat keinen Hauptteil. Die Singularität 1 ist hebbar.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Die Kurve $\mathcal{C}$ liegt in der linken Halbebene. Die Funktion $\log(-(z-\mathrm{i}))$ ist dort eine Stammfunktion von $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$.

Damit gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \big[\log(-(z-\mathrm{i}))\big]_{z=-1-\mathrm{i}}^{z=-1+\mathrm{i}} = \log 1 - \log(1+2\mathrm{i}) = -\ln\sqrt{5} - \mathrm{i}\arctan 2.$$

b) Mit

$$\frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^{11}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-11}}{n!}$$

gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^{11}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n-11}}{n!}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{5!}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{120} = \frac{\pi\mathrm{i}}{60}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

α) Mit $\overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2\mathrm{i}xy$ hat man $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = -2xy$, damit die Cauchy-Riemann-DGL

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \iff 2x = -2x, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \iff -2y = 2y.$$

$z = 1$ bedeutet $x = 1$ und $y = 0$. Mit $x = 1$ ist die erste C-R-DGL nicht erfüllt, damit ist $\overline{z}^2$ für $z = 1$ nicht komplex-differenzierbar.

β) Man betrachtet den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\overline{1+h})^2 - 1}{h}.$$

Einerseits gilt mit $h = t$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2 - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2$$

und andererereseits mit $h = \mathrm{i}t$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1-\mathrm{i}t)^2 - 1}{\mathrm{i}t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2\mathrm{i}t}{\mathrm{i}t} = -2,$$

damit existiert der betrachtete komplexe Grenzwert nicht. Also ist $\overline{z}^2$ für $z = 1$ nicht komplex-differenzierbar.

b) Wahr.
Es wird in der Tat auf ein Winkelgebiet abgebildet, welches den Öffnungswinkel 2α besitzt. Im Winkelgebiet gilt stets $z \neq 0$ und dort ist ist die Funktion z^2 konform, da $(z^2)' = 2z \neq 0$ gilt.

(Der Scheitelpunkt 0 gehört nicht zum Winkelgebiet.)

c) Wahr.
Der Integrand hat Singularitäten bei -4, 0 und 4. Diese Singularitäten liegen außerhalb der Kreisscheibe $|z-2| = \frac{3}{2}$, welche den Kreis $|z-2| = 1$ enthält. Der Integrand ist auf dieser Kreisscheibe analytisch, nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwindet somit das vorgelegte Integral.

d) Falsch.
Ein Gegenbeispiel ist mit

$$f(z) = \frac{3}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

gegeben. Diese Funktion hat bei 2 einen Pol 2. Ordnung und das Residuum 3.

e) Wahr.
Es gilt sowieso für $R \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i},$$

und im Grenzübergang $R \to \infty$ ändert sich daran nichts, da die rechte Seite von R unabhängig ist.