Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 17

A. Gündel-vom Hofe 25. September 2017

September – Klausur
Analysis III f. Ing.

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

Es gibt eine eindeutig bestimmte Möbius-Transformation T, die den Fixpunkt -1 hat und die Gleichungen $T(0) = \infty$ und $T(\infty) = 1$ erfüllt.

a) Ermitteln Sie das Bild
der offenen unteren komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$.

b) Ermitteln Sie den Term $T(z)$.

c) Finden Sie für den positiv durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 das Bild unter T. Eine kurze Rechnung und eine Skizze mit Durchlaufrichtungen reichen als Nachweis.

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe der Integralformel von Cauchy (C.I.F.) oder des Residuensatzes:

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + 2\mathrm{i}\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \text{b)} \int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\,\mathrm{d}z.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Das Gebiet H, definiert durch

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \tfrac{1}{\sqrt{3}}x\},$$

stellt ein Winkelgebiet im I. Quadranten mit Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6}$ dar.

Skizzieren Sie das Gebiet H und
lösen Sie das folgende Randwertproblem:
Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{für } (x,y) \in H, \\ &u(t,0) = t^3, \quad u(t, \tfrac{1}{\sqrt{3}}t) = \tfrac{8}{3\sqrt{3}}t^3 \qquad \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Verwenden Sie zur Lösung die Methode der harmonischen Verpflanzung mit der Verpflanzungsabbildung $f(z) = z^3$ und wählen Sie als Ansatzfunktionen die harmonischen Funktionen x und y.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Betrachten Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{e}^z$.

a) Ermitteln Sie für die Funktion $f(z)$ reelle Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$, so dass gilt

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Zeigen Sie, dass $f(z)$ für $z = 0$ nicht komplex-differenzierbar ist.

c) Ermitteln Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z.$$

5. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie die komplexen Integrale

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \quad \text{mit } \mathcal{C} : t \mapsto 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi;$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^7 \mathrm{e}^{1/z^2}\,\mathrm{d}z.$

Quadratwurzeln und Winkelfunktionen brauchen nicht ausgewertet zu werden.

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ .$$

Bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \neq 0$ gilt $\log(-z) = \mathrm{i}\pi + \log z$.

b) Eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion $f(z)$, die an *keinem* Punkt in $\mathbb{C}$ eine konforme Abbildung darstellt, ist eine konstante Funktion: $f(z) = \text{const.}$

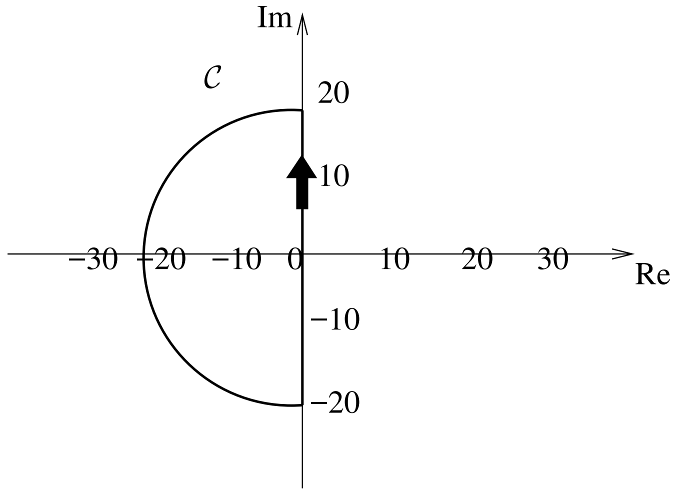
c) Die harmonische Funktion $u(x, y) = \cosh x \sin y$ nimmt auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ihr Maximum an.

d) Die Funktion $f(z)$ mit

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1}$$

hat bei $z = 0$ eine hebbare Singularität.

e) Die geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ ist, wie nachfolgend skizziert, aus einer vertikalen Strecke und einem linken Halbkreis mit Radius 20 zusammengesetzt und wird positiv durchlaufen.



Mit dieser Kurve $\mathcal{C}$ gilt

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{2z+4}{z^2+4z+3}\,\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}.$$