Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 18
G. Penn-Karras 25. Juli 2018

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie für das nichtlineare dynamische System

$$\dot{x} = (x-1)(y-2)$$
$$\dot{y} = (x-3)(y+1)$$

die Gleichgewichtspunkte zusammen mit dem Stabilitätscharakter
(*asymptotisch stabil*, *stabil*, *instabil*).

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{1,3\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{z-1}}.$$

Diese Funktion besitzt Singularitäten bei $z_1 = 1$ und $z_2 = 3$.

a) Entwickeln Sie für $k = 1, 2$ die Funktion f in eine Laurent-Reihe im Ringgebiet $0 < |z - z_k| < 2$ und bestimmen Sie anhand dieser Laurent-Reihe den Typ der Singularität z_k.

b) Ermitteln Sie die folgenden Residuen:

$$\operatorname{Res}(f, 1) \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}(f, 3).$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\text{a)} \quad \int\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2+1)\cos\pi z}\,\mathrm{d}z \quad \text{(5 Punkte)}$$

$$\text{b)} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x \quad \text{(5 Punkte)}$$

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

4. Aufgabe

10 Punkte

Wir betrachten den Kreis K_1 mit Mittelpunkt 1 und den Kreis K_{-1} mit Mittelpunkt -1; beide Kreise K_1 und K_{-1} verlaufen durch die Punkte i und $-$i. (Beide Kreise haben also den Radius $\sqrt{2}$.)

Es gibt eine Möbiustransformation T mit folgenden Eigenschaften:

- T bildet K_1 auf die reelle Achse ab. -
- T bildet K_{-1} auf die imaginäre Achse ab.
- T bildet den Punkt 0 auf den Punkt $1 + \mathrm{i}$ ab.

(Sie müssen nicht beweisen, dass es eine solche Möbiustransformation T wirklich gibt.)

a) Wenn der Kreis K_1 im positiven Drehsinn (↺) durchlaufen wird, wie wird dann seine Bildgerade durchlaufen?

   Wenn der Kreis K_{-1} im positiven Drehsinn (↺) durchlaufen wird, wie wird dann seine Bildgerade durchlaufen?

   Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

b) Der Punkt $2 + \mathrm{i}$ liegt auf K_1 und außerhalb von K_{-1}. Begründen Sie, dass sein Bild $T(2 + \mathrm{i})$ auf der negativen reellen Achse liegt.

c) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse.

d) Wenn die imaginäre Achse von unten nach oben durchlaufen wird (↑), wie wird dann ihr Bild durchlaufen? Benutzen Sie hier Teil b).

e) Bestimmen Sie nun explizit den Term $T(z)$ der Möbiustransformation T.

5. Aufgabe 10 Punkte

Das Gebiet G mit

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$$

ist ein Winkelgebiet im I. Quadranten.

Lösen Sie auf $\overline{G}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in G \\ &u(t, 0) = -2t^2,\ u(t, t) = 6t^2,\ t \geqslant 0, \end{aligned}$$

indem Sie die Methode der harmonischen Verpflanzung wählen. Benutzen Sie hierbei die Verpflanzungsabbildung $f(z) = z^2$ und die harmonischen Ansatzfunktionen x und y.

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Die komplexe Funktion $f(z)$, die durch $\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = 3x^2y - y^3$ und $\operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = 3xy^2 + x^3$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben ist, ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

b) (2 Punkte) Auf dem Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0\}$ ist die Funktion $-\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{z^2}$.

c) (3 Punkte) Das Polynom $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25$ ist stabil.

d) (3 Punkte) Der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ des zweidimensionalen dynamischen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

ist stabil.