Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 18
G. Penn-Karras 25. Juli 2018

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Musterlösung Klausur Analysis III f. Ing., 25. Juli 2018

1. Aufgabe

10 Punkte

Die Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) bestimmen sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= (x^* - 1)(y^* - 2) \\ 0 &= (x^* - 3)(y^* + 1). \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte: $(1, -1)$ und $(3, 2)$

Berechnung der Jacobi-Matrix:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2 & x - 1 \\ y + 1 & x - 3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchung von GGP $(1, -1)$ auf Stabilität:

$$\mathcal{J}(1, -1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}(1, -1)$ hat Diagonalgestalt, die leicht ablesbaren Eigenwerte sind -3 und -2. Alle Eigenwerte haben negativen Realteil. Der GGP $(1, -1)$ ist asymptotisch stabil.

Untersuchung von GGP $(3, 2)$ auf Stabilität:

$$\mathcal{J}(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}(3, 2)$ hat die Eigenwerte $\sqrt{6}$ und $-\sqrt{6}$. Ein Eigenwert hat positiven Realteil. Der GGP $(3, 2)$ ist instabil.

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Für die Singularität 1 haben wir im Ringgebiet $0 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} = \frac{z-1}{z-3} = (z-1)\cdot\frac{1}{z-3} = (z-1)\cdot\frac{1}{(z-1)-2}$$
$$= -\frac{z-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{z-1}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{l} = \sum_{l=1}^{\infty}(-2^{-l})(z-1)^{l}.$$

Diese Laurent-Reihe hat keinen Hauptteil. Die Singularität 1 ist hebbar.

Für die Singularität 3 haben wir im Ringgebiet $0 < |z-3| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} = \frac{z-1}{z-3} = \frac{z-3+2}{z-3} = \frac{2}{z-3} + 1$$

Die Laurent-Reihe ist eine Summe. Der Hauptteil besteht nur aus dem Summanden $\frac{2}{z-3}$. Die Singularität 3 ist eine Polstelle 1. Ordnung.

b) Man liest die Residuen aus den ermittelten Laurent-Reihen als die „$a_{-1}q$“ ab:

$$\operatorname{Res}(f,1) = 0, \quad \operatorname{Res}(f,3) = 2.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Innerhalb des Kreises $|z-1| = 1$ liegen vom Nenner die Nullstellen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.

Man hat zunächst

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z}\,\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z}, \frac{3}{2}\right)\right).$$

Die Stellen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ sind Polstellen 1. Ordnung gemäß folgenden Rechnungen:

$$z = \tfrac{1}{2}: \quad \frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z} = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{\cos \pi z} = \frac{g(z)}{h(z)},$$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5} \neq 0,\ h(\frac{1}{2}) = 0,\ h'(0) = -\pi \sin \frac{\pi}{2} = -\pi \implies$ Polstelle 1. Ordnung und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{5\pi}.$$

$$z = \tfrac{3}{2}: \quad \frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z} = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{\cos \pi z} = \frac{g(z)}{h(z)},$$

$g(\frac{3}{2}) = \frac{4}{13} \neq 0,\ h(\frac{3}{2}) = 0,\ h'(\frac{3}{2}) = -\pi \sin \frac{3\pi}{2} = \pi. = \pi \implies$ Polstelle 1. Ordnung und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)\cos \pi z}, \tfrac{3}{2}\right) = \frac{4}{13\pi}.$$

Folglich gilt

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)\cos \pi z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{4}{5\pi} + \frac{4}{13\pi}\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{32}{65\pi}\right) = -\frac{64}{65}\mathrm{i}.$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $-3\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$, i und $3\mathrm{i}$. Alle diese vier Nullstellen sind einfach und nicht-reell, der Zählergrad ist vier Einheiten niedriger als der Nennergrad, damit darf das Beispiel 61 aus dem Skript verwendet werden. Die Nullstellen i und $3\mathrm{i}$ liegen in der oberen Halbebene. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}, \mathrm{i}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}, 3\mathrm{i}\right)\right)$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+9)}\right)_{|z=\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{(z^2+1)(z+3\mathrm{i})}\right)_{|z=3\mathrm{i}}\right]$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}\cdot 8} + \frac{1}{(-8)\cdot 6\mathrm{i}}\right]$$
$$= 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{24\mathrm{i}} = \frac{\pi}{12}.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Der Punkt 0 liegt links vom positiv durchlaufenen Kreis K_1. Der Bildpunkt $1 + \mathrm{i}$ muss links von der reellen Achse zu liegen kommen, also wird die reelle Achse von links nach rechts durchlaufen ($\rightarrow$).

Der Punkt 0 liegt links vom positiv durchlaufenen Kreis K_{-1}. Der Bildpunkt $1 + \mathrm{i}$ muss links von der imaginären Achse zu liegen kommen, also wird die imaginäre Achse von oben nach nach durchlaufen ($\downarrow$).

Skizze:

b) Weil der Punkt $2 + \mathrm{i}$ auf K_1 liegt, befindet sich $T(2 + \mathrm{i})$ auf der reellen Achse.

Wird der Kreis K_{-1} positiv durchlaufen, so liegt der Punkt $2 + \mathrm{i}$ zur Rechten dieses Kreise. Damit liegt der Bildpunkt $T(2 + \mathrm{i})$ rechts von der von oben nach unten durchlaufenen imaginären Achse.

Folglich ist $T(2 + \mathrm{i})$ ein Punkt auf der negativen reellen Achse.

c) Punkte auf der imaginären Achse sind $-\mathrm{i}$, 0 und i.

Der mittlere Punkt 0 wird auf $1 + \mathrm{i}$ abgebildet.

Die im Hinweis benannten Schnittpunkte i und $-\mathrm{i}$ der beiden Kreise werden auf die Schnittpunkte 0 und ∞ der beiden Koordinatenachsen abgebildet.

Man hat also in jedem Fall die Bildpunkte 0, ∞ und $1 + \mathrm{i}$. Diese Bildpunkte liegen auf der I. Winkelhalbierenden.

Das Bild der imaginären Achse ist die I. Winkelhalbierende.

d) Hier hat man die Alternative $T(-\mathrm{i}) = 0,\ T(\mathrm{i}) = \infty$ oder $T(-\mathrm{i}) = \infty,\ T(\mathrm{i}) = 0$ zu entscheiden.

Bereits bekannt ist, dass der Bildpunkt $T(2 + \mathrm{i})$ auf der negativen reellen Achse liegt.

Der Punkt $2 + \mathrm{i}$ liegt rechts von der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse $\uparrow$, damit muss der Bildpunkt $T(2 + \mathrm{i})$ rechts von der I. Winkelhalbierenden zu liegen kommen.

Somit wird die I. Winkelhalbierende nach Südwesten durchlaufen. Es ist $T(\uparrow) = \swarrow$.

Die Abfolge $-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}$ wird also auf $\infty, 1 + \mathrm{i}, 0$ abgebildet.

e) Mit $T(-\mathrm{i}) = \infty$ und $T(\mathrm{i}) = 0$ hat man schnell

$$T(z) = \frac{az - \mathrm{i}a}{cz + \mathrm{i}c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

Die Aussage $T(0) = 1 + \mathrm{i}$ führt zu

$$T(z) = -(1 + \mathrm{i})\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \frac{-(1 + \mathrm{i})z + 1 - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Die Verpflanzungsabbildung $f(z)$ als $\mathbb{R}^2$-Abbildung:

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Die Randkurven $t \mapsto (t, 0)$ und $t \mapsto (t, t)$ werden auf die Randkurven $t \mapsto (t^2, 0)$ und $t \mapsto (0, 2t^2)$ abgebildet. Diese Randkurven begrenzen den I. Quadranten. Das Bildgebiet H ist der I. Quadrant.

Für die verpflanzte harmonische Funktion U auf H gilt

$$u(t, 0) = -2t^2 = U(t^2, 0), \qquad u(t, t) = 6t^2 = U(0, 2t^2),$$

also

$$U(x', 0) = -2x', \qquad U(0, y')) = 3y'.$$

Mit den gegebenen Ansatzfunktionen setzen wir an:

$$U(x', y') = Ax' + By'$$

und finden durch Hingucken $A = -2$ und $B = 3$. Damit ist $U(x', y') = -2x' + 3y'$, und schließlich bekommen wir die Lösung des vorgelegten Randwertproblems:

$$u(x, y) = U(\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y), \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y)) = -2(x^2 - y^2) + 6xy.$$

6. Aufgabe 10 Punkte

a) (2 Punkte) Falsch.
Der Imaginärteil ist keine harmonische Funktion:

$$\Delta \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = 0 + 6x \neq 0.$$

Damit ist f nicht auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

f ist sogar nirgends in $\mathbb{C}$ analytisch.

b) (2 Punkte) Wahr.
In der in 0 punktierten Ebene gilt ohne weitere Einschränkung, dass $\frac{1}{z^2}$ die Ableitung von $-\frac{1}{z}$ ist.

c) (3 Punkte) Falsch.

α) Die komplexe Zahl $1 - 2\mathrm{i}$ ist eine Nullstelle des vorgelegten Polynoms mit nicht-negativem Realteil. Damit ist das Polynom nicht stabil.

β) Routh-Hurwitz-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 25 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Ein Hauptminor ist negativ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Damit ist nach dem Hurwitz-Routh-Kriterium das vorgelegte Polynom nicht stabil.

d) (3 Punkte) Wahr.
Das dynamische System ist linear. Die Eigenwerte der Systemmatrix sind i und $-\mathrm{i}$. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts sind automatisch gleich. Damit ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ stabil.