Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 18
G. Penn-Karras 04. Oktober 2018

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das reelle dynamische System

$$\dot{x} = (x+1)(y-2),$$
$$\dot{y} = (x+3)(y+3).$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte.

b) Für welche dieser Gleichgewichtslösungen kann mit dem Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall der Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* oder *instabil*) ermittelt werden? Geben Sie bei diesen Gleichgewichtslösungen den Stabilitätscharakter an und begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mathrm{i}z-1}\,\mathrm{d}z, \quad \mathcal{C} : t \mapsto t+\mathrm{i},\ -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

mit Hilfe einer geeigneten Stammfunktion. Eine Umwandlung in ein reelles Parameterintegral ist nicht erlaubt.

(Sie brauchen Quadratwurzeln und Winkelfunktionen nicht auszuwerten.)

3. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z\mathrm{e}^{z-1}}{(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z \quad \text{(5 Punkte)}$$

b) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \quad \text{(5 Punkte)}$$

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden, wobei mögliche Voraussetzungen dann überprüft werden sollen. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

4. Aufgabe

10 Punkte

Es gibt eine Möbiustransformation T mit folgenden Eigenschaften:

- T bildet den positiv durchlaufenen Einheitskreis auf die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse ab: $T(\circlearrowleft) = \uparrow$.
- T bildet die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse auf die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse ab: $T(\uparrow) = \rightarrow$.
- T bildet den Punkt ∞ auf den Punkt 1 ab: $T(\infty) = 1$.

(Sie müssen nicht beweisen, dass es eine solche Möbiustransformation T wirklich gibt.)

a) Ermitteln Sie anhand einer aussagekräftigen Skizze die Bilder $T(\mathrm{i})$ und $T(-\mathrm{i})$.

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Bild der durch die Punkte 1 und $1+\mathrm{i}$ gehenden Geraden innerhalb eines Quadranten liegt und damit ein Kreis sein muss.

c) Bestimmen Sie explizit den Term $T(z)$ der Möbiustransformation T.

5. Aufgabe

10 Punkte

Das Gebiet G mit

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < \tfrac{\pi}{2}\}$$

ist ein offener Streifen, der in der oberen Halbebene und parallel zur x-Achse liegt.

Lösen Sie auf $\overline{G}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{für } (x,y) \in G \\ &u(t,0) = \mathrm{e}^t,\ u(t,\tfrac{\pi}{2}) = 2\mathrm{e}^t,\ -\infty < t < \infty, \end{aligned}$$

indem Sie die Methode der harmonischen Verpflanzung wählen. Benutzen Sie hierbei die Verpflanzungsabbildung $f(z) = \mathrm{e}^z$ und die harmonischen Ansatzfunktionen x und y.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Die Funktion $\operatorname{Im} z + \mathrm{i} \operatorname{Re} z$ ist für $z = 0$ komplex-differenzierbar.

b) (2 Punkte) Der Ausdruck

$$\frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1}$$

stellt die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)(z-1)}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ im Außengebiet $1 < |z-2|$ dar.

c) (2 Punkte) Gilt für eine komplexe Funktion $f(z)$ mit einer isolierten Singularität im Punkt z_0 die Aussage $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$, so ist z_0 keine wesentliche Singularität.

d) (2 Punkte) Das Polynom $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 30x + 50$ ist stabil.

e) (2 Punkte) Der Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ des zweidimensionalen dynamischen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

ist stabil.