Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 18

G. Penn-Karras 04. Oktober 2018

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Musterlösung Klausur Analysis III f. Ing., 04. Oktober 2018

1. Aufgabe

10 Punkte

Die Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) bestimmen sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= (x^* + 1)(y^* - 2) \\ 0 &= (x^* + 3)(y^* + 3). \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte: $(-1, -3)$ und $(-3, 2)$

Berechnung der Jacobi-Matrix:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2 & x + 1 \\ y + 3 & x + 3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchung von GGP $(-1, -3)$ auf Stabilität:

$$\mathcal{J}(1, -1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}(-1, -3)$ hat Diagonalgestalt, die leicht ablesbaren Eigenwerte sind -5 und 2. Ein Eigenwert hat positiven Realteil. Der GGP $(-1, -3)$ ist instabil.

Untersuchung von GGP $(3, 2)$ auf Stabilität:

$$\mathcal{J}(-3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}(-3, 2)$ hat die Eigenwerte $\pm i\sqrt{10}$ Die Eigenwerte sind rein imaginär. Der Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall macht hierzu keine Aussage.

2. Aufgabe

10 Punkte

Der Integrationsweg $\mathcal{C}$ ist eine Strecke parallel zur reellen Achse und schneidet die imaginäre Achse im Punkt i.

Als Stammfunktionen bieten sich die Funktionen $-\mathrm{i}\log\alpha(\mathrm{i}z-1)$ mit $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ an, die sämlich auf Schlitzgebieten definiert sind.

Im Falle $\alpha = 1$ beginnt der Schlitz aber bei $-\mathrm{i}$ und verläuft auf der imaginären Achse nach oben.

Die Kurve $\mathcal{C}$ verläuft über diesen Schlitz. Man muss eine andere Stammfunktion wählen.

Wir wählen $\alpha = -\mathrm{i}$. Es ist dann $-\mathrm{i}\log(-\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)) = -\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i})$. Diese Funktion ist auf einem Schlitzgebiet erklärt, in welchem der Schlitz bei $-\mathrm{i}$ beginnt und nach links parallel zur reellen Achse verläuft.

Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mathrm{i}z-1}\,\mathrm{d}z &= \left[-\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i})\right]_{z=-1+\mathrm{i}}^{z=1+\mathrm{i}} \\
&= -\mathrm{i}\left[\log(z+\mathrm{i})\right]_{z=-1+\mathrm{i}}^{z=1+\mathrm{i}} \\
&= -\mathrm{i}\left(\log(1+2\mathrm{i}) - \log(-1+2\mathrm{i})\right) \\
&= -\mathrm{i}\Big((\ln\sqrt{5} + \mathrm{i}\arctan 2) - (\ln\sqrt{5} + \mathrm{i}(\pi - \arctan 2))\Big) \\
&= 2\arctan 2 - \pi.
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Innerhalb des Kreises $|z-1|=1$ liegt vom Nenner die Nullstelle 1. Der Zähler verschwindet für $z=1$ nicht, damit ist 1 eine Polstelle 1. Ordnung.

Man hat

$$\begin{aligned}
&\int_{|z-1|=1} \frac{z\mathrm{e}^{z-1}}{(z-1)(z+3)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z\mathrm{e}^{z-1}}{(z-1)(z+3)}, 1\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\frac{z\mathrm{e}^{z-1}}{z+3}}{z-1}, 1\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z\mathrm{e}^{z-1}}{z+3}\right)\Big|_{z=1} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\mathrm{i}$. Diese beiden Nullstellen sind einfach und nicht-reell, der Zählergrad ist zwei Einheiten niedriger als der Nennergrad, damit darf das Beispiel 61 aus dem Skript verwendet werden. Die Nullstelle $-1+\mathrm{i}$ liegt in der oberen Halbebene.

Es ist dann

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2z+2}, -1+\mathrm{i}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2z+2}\Big|_{z=-1+\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}} = \pi.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Die imaginäre Achse $\uparrow$ kann durch die Punktfolge $-\mathrm{i}, \mathrm{i}, \infty$ beschrieben werden. Zum Bild $\rightarrow$ muss die Punktfolge $T(-\mathrm{i}), T(\mathrm{i}), 1$ passen.

Die Punkte i und $-\mathrm{i}$ sind die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der imaginären Achse. Unter T werden diese Punkte auf die Schnittpunkte 0 und ∞ der imaginären Achse und der reellen Achse abgebildet. Demnach gilt entweder $T(\mathrm{i}) = 0$ und $T(-\mathrm{i}) = \infty$ oder $T(\mathrm{i}) = \infty$ und $T(-\mathrm{i}) = 0$.

Dementsprechend haben wir uns für die reelle Achse $\rightarrow$ zwischen der Punktfolge $\infty, 0, 1$ und der Punktfolge $0, \infty, 1$ zu entscheiden. Die erstgenannte Punktfolge beschreibt den Durchlauf der reellen Achse von links nach rechts, wie es sein sollte. Es gilt somit $T(\mathrm{i}) = 0$ und $T(-\mathrm{i}) = \infty$.

b) Diese Gerade liegt rechts vom Einheitskreis $\circlearrowleft$ und rechts von der imaginären Achse $\uparrow$. Damit liegt die Bildfigur rechts von der imaginären Achse $\uparrow$ und rechts von der reellen Achse $\rightarrow$, also vollständig im IV. Quadranten. Damit kann die Bildfigur keine Gerade sein, da Geraden stets zwei Quadranten durchqueren. Somit ist die Bildfigur ein Kreis mit endlichem Radius.

c) Mit $T(\mathrm{i}) = 0$ und $T(-\mathrm{i}) = \infty$ finden wir schnell, dass

$$T(z) = \frac{az - a\mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

gilt. Aus

$$T(z) = \frac{az - a\mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \frac{a - \frac{a}{z}\mathrm{i}}{1 + \frac{\mathrm{i}}{z}}$$

folgt $T(\infty) = a$. Mit der Angabe $T(\infty) = 1$ ist somit $a = 1$ zu setzen.

Es gilt

$$T(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Die Verpflanzungsabbildung $f(z)$ als $\mathbb{R}^2$-Abbildung:

$$(x, y) \mapsto (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y).$$

Die Randkurven $t \mapsto (t, 0)$ und $t \mapsto (t, \frac{\pi}{2})$ werden auf die Randkurven $t \mapsto (\mathrm{e}^t, 0)$ und $t \mapsto (0, \mathrm{e}^t)$ abgebildet. Diese Randkurven begrenzen den I. Quadranten. Das Bildgebiet H ist der I. Quadrant.

Für die verpflanzte harmonische Funktion U auf H gilt

$$u(t, 0) = \mathrm{e}^t = U(\mathrm{e}^t, 0), \qquad u(t, \tfrac{\pi}{2}) = 2\mathrm{e}^t = U(0, \mathrm{e}^t),$$

also

$$U(x', 0) = x', \qquad U(0, y') = 2y'.$$

Mit den gegebenen Ansatzfunktionen setzen wir an:

$$U(x', y') = Ax' + By'$$

und finden durch Hingucken $A = 1$ und $B = 2$. Damit ist $U(x', y') = x' + 2y'$,

und schließlich bekommen wir die Lösung des vorgelegten Randwertproblems:

$$u(x, y) = U(\mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y), \mathrm{Im}\, f(x + \mathrm{i}y)) = \mathrm{e}^x(\cos y + 2 \sin y).$$

6. Aufgabe 10 Punkte

a) (2 Punkte) Falsch.
Mit $u(x, y) = y$ und $v(x, y) = x$ wird die Cauchy-Riemann-DGL $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ zu $1 = -1$ und damit für $(x, y) = (0, 0)$ falsch.

b) (2 Punkte) Falsch.
Die angegebene Summe ist keine Laurentreihe: Der zweite Summand ist nicht von der Form $a_k(z-2)^k$ mit einer komplexen Konstanten a_k und einer Indexnummer $k \in \mathbb{Z}$.

c) (2 Punkte) Falsch.
Man betrachte $f(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}}$ mit $z_0 = 0$. Anhand der Laurentreihe um 0

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-2k}$$

erkennt man, dass 0 eine wesentliche Singularität ist und trotzdem das Residuum von f gleich Null ist.

d) (2 Punkte) Falsch.

α) Die komplexe Zahl $1 - 3\mathrm{i}$ ist eine Nullstelle des vorgelegten Polynoms mit nicht-negativem Realteil. Damit ist das Polynom nicht stabil.

β) Routh-Hurwitz-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 50 & 30 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Ein Hauptminor ist negativ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 30 & 7 \end{vmatrix} = -16.$$

Damit ist nach dem Hurwitz-Routh-Kriterium das vorgelegte Polynom nicht stabil.

e) (2 Punkte) Falsch.
Der Eigenwert ist 0 und hat Realteil 0, alg. VFH 2 und geom. VFH 1. Damit ist der GGP $(0, 0)$ nicht stabil.

Explizite Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) + x_2(0)t \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Bei $x_2(0) \neq 0$ gilt $\lim_{t \to \infty} |x_1(t)| = \infty$.