Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 19

G. Penn-Karras 17. Juli 2019

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Werten Sie die folgenden Integrale aus:

$$\text{a)} \int\limits_{|z-2|=1} z \log z \, \mathrm{d}z, \quad \text{b)} \int\limits_{|z-2|=1} \frac{z^3}{(z-2)^2} \, \mathrm{d}z, \quad \text{c)} \int\limits_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z \sin \frac{\pi}{2} z} \, \mathrm{d}z,$$

2. Aufgabe 11 Punkte

Ermitteln Sie für das nichtlineare autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+1)(x-4)y \\ \dot{y} &= x(y-1) \end{aligned}$$

alle Gleichgewichtslösungen zusammen mit deren Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* oder *instabil*).

3. Aufgabe 10 Punkte

Das Gebiet G

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \,\text{und}\, y > -x\,\}$$

ist ein Winkelgebiet in der oberen Halbebene mit Innenwinkel $135°$.

Lösen Sie auf G das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,0) &= 3x^2 && \text{für } x \geq 0, \\ u(x,-x) &= -4x^2 && \text{für } x < 0. \end{aligned}$$

indem Sie die Methode der harmonischen Verpflanzung wählen. Benutzen Sie hierbei die Verpflanzungsabbildung $f(z) = z^2$ und die harmonischen Ansatzfunktionen x und y.

Hinweis: Es ist hilfreich, das Bildgebiet $f(G)$ zu skizzieren.

4. Aufgabe

10 Punkte

In der komplexen Ebene seien

- $\nearrow$ die von links unten nach rechts oben durchlaufene I. Winkelhalbierende $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$,
- $\searrow$ die von links oben nach rechts unten durchlaufene II. Winkelhalbierende $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$,
- $\rightarrow$ die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse und
- $\circlearrowleft$ der positiv durchlaufene Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Ermitteln Sie die Möbius-Transformation T mit den Eigenschaften

$$T(\nearrow) = \circlearrowleft, \quad T(\searrow) = \rightarrow \ \text{ und } T(1+\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Werten Sie das Integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z, \quad \mathcal{C}:\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ \pi \le t \le 2\pi$$

mit Hilfe einer komplexen Stammfunktion aus. Eine Berechnung als Parameterintegral ist nicht erlaubt.

Bitte zur Aufgabe 6 wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die auf dem Schlitzgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z \neq 0\}$ definierte komplexe Logarithmusfunktion $\log z$ ist eine konforme Abbildung.

b) Hat eine Möbius-Transformation T drei Fixpunkte, so gilt für alle $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Gleichung $T(z) = z$.
Hinweis: Ein Punkt z^* einer Möbius-Transformation T heißt ein Fixpunkt von T, wenn $T(z^*) = z^*$ gilt.

c) Die Werte der harmonischen Funktion $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$ liegen alle im Intervall $[-1, 1]$.

d) Aus der Gleichung

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} (z-0)^n, \quad |z| > 1$$

folgt, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{z-1}$ an der Stelle $z = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt.

e) Das Polynom $(z+3)(z^2+5)$ ist stabil.