Analysis III für Ingenieurwissenschaften 17. Juli 2019
Musterlösung

1. Aufgabe

9 Punkte

a)

$$\int\limits_{|z-2|=1} z \log z \, \mathrm{d}z = 0,$$

da $z \log z$ analytisch in der offenen rechten Halbebene, die den Integrationsweg enthält.

b)

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{z^3}{(z-2)^2} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(z-2)^2}, 2\right) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{1!} \lim_{z\to 2} (z^3)' = 2\pi\mathrm{i} \cdot (3z^2)_{|z=2} = 24\pi\mathrm{i}.$$

c)

$$\begin{aligned} \int\limits_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z \sin \frac{\pi}{2} z} \, \mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z \sin \frac{\pi}{2} z}, 2\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z}}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} z}\right)_{|z=2} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{2}}{\frac{\pi}{2} \cos \pi}\right) = 2\pi\mathrm{i} \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Die Gleichgewichtslösungen (x^*, y^*) werden aus

$$(x^*+1)(x^*-4)y^* = 0, \quad x^*(y^*-1) = 0$$

bestimmt: $(x^*, y^*) = (-1, 1)$, $(4, 1)$ und $(0, 0)$.

Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(x, y)$ lautet allgemein:

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} (2x-3)y & (x+1)(x-4) \\ y-1 & x \end{pmatrix}$$

Nun haben wir

- $(x^*, y^*) = (-1, 1)$:

$$\mathcal{J}(-1,1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{Eigenwerte: } -5 \text{ und } -1 \implies \text{asymptotisch stabil}$$

- $(x^*, y^*) = (4, 1)$:

$$\mathcal{J}(4,1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \text{Eigenwerte: } 4 \text{ und } 5 \implies \text{instabil}$$

- $(x^*, y^*) = (0, 0)$:

$$\mathcal{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Eigenwerte: } -2 \text{ und } 2 \implies \text{instabil}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Die Verpflanzungsabbildung $f(z) = z^2$ vermittelt die Abbildung $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy$.

Insbesondere gilt $(x, 0) \mapsto (x^2, 0)$ und $(x, -x) \mapsto (0, -2x^2)$.

(Das Bildgebiet $f(G)$ ist der IV. Quadrant.)

Für die Randbedingungen hat man:

$$u(x, 0) = 3x^2 = U(x^2, 0), \qquad u(x, -x) = -4x^2 = U(0, -2x^2)$$

Im Bildgebiet muss die verpflanzte Funkttion U harmonisch sein und die neuen Randbedingungen

$$U(x', 0) = 3x', \qquad U(0, y') = 2y'$$

erfüllen. Man erkennt leicht, dass

$$U(x', y') = 3x' + 2y'$$

eine Lösung des verpflanzten RWPs ist.

Dann ist

$$u(x, y) = U(x^2 - y^2, 2xy) = 3(x^2 - y^2) + 4xy$$

eine Lösung des vorgelegten RWPs.

4. Aufgabe 10 Punkte

Die Gerade $\nearrow$ ist der verallgemeinerte Kreis durch die Punkte 0, $1+\mathrm{i}$ und ∞ in dieser Reihenfolge. Damit liegen auch die Bildpunkte $T(0)$, i und $T(\infty)$ in dieser Reihenfolge auf der Bildkurve $\circlearrowleft$.

Die Schnittpunkte der Kurven $\nearrow$ und $\searrow$ werden auf die Schnittpunkte der Kurven $\circlearrowleft$ und $\rightarrow$ abgebildet: $T(\{0,\infty\}) = \{-1, 1\}$.

Aus beiden Feststellungen folgt $T(0) = 1$ und $T(\infty) = -1$.

Mit $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ergibt sich $d = b$ und $c = -a$. Damit haben wir

$$T(z) = \frac{az+b}{-az+b} = \frac{z+b'}{-z+b'};$$

denn sicher ist $a \neq 0$, und wir setzen $b' := \frac{b}{a}$.

Es ist

$$\mathrm{i} = \frac{1+\mathrm{i}+b'}{-1-\mathrm{i}+b'} \implies 1-\mathrm{i}+\mathrm{i}b' = 1+\mathrm{i}+b'$$
$$\implies (\mathrm{i}-1)b' = 2\mathrm{i}, \implies b' = \frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i}.$$

Die gesuchte Möbiustransformation T ist durch

$$T(z) = \frac{z+1-\mathrm{i}}{-z+1-\mathrm{i}}$$

gegeben.

5. Aufgabe

10 Punkte

Der Integrationsweg hat Anfangspunkt -1 und Endpunkt 1 und verläuft in der unteren Halbebene, wobei sie die negative imaginäre Achse durchquert.

Zunächst haben wir

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}z} = -\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

Als Stammfunktion wählen wir eine Logarithmusfunktion, deren Schlitz gleich $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leqslant 0 \,\text{und}\, \operatorname{Im} z = 1\}$ ist. Ein solcher Logarithmus ist $-\mathrm{i}\log(z-\mathrm{i})$.

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z &= \big[-\mathrm{i}\log(z-\mathrm{i})\big]_{z=-1}^{z=1} \\
&= -\mathrm{i}\log(1-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\log(-1-\mathrm{i}) \\
&= -\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
$\log z$ ist auf dem Schlitzgebiet analytisch und hat die Ableitung $\frac{1}{z}$. Die Ableitung verschwindet nirgends, damit vermittelt $\log z$ eine konforme Abbildung.

b) Wahr.
Drei Fixpunkte zu haben, bedeutet, dass es drei Punkte z_1, z_2 und z_3 gibt mit der Eigenschaft $T(z_k) = z_k$, $k = 1, 2, 3$. Das sind drei Punktpaare, die T eindeutig bestimmen. Die Identitätstransformation $T(z) = z$ erfüllt die genannte Eigenschaft und ist aufgrund besagter Eindeutigkeit gleich T.

c) Wahr.
Die gegebene Funktion ist harmonisch, damit nimmt sie Minimum und Maximum nur auf dem Rand $x^2 + y^2 = 1$ an. Dort gilt

$$u(x, y) = x^2 - y^2 = 2x^2 - 1.$$

Mit $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ergibt sich $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ und somit $-1 \leqslant u(x, y) \leqslant 1$, also $u(x, y) \in [-1, 1]$.

d) Falsch.
Die angegebene Laurentreihe ist keine Entwicklung in einer punktierten Kreisscheibe $0 < |z| < r$ mit irgendeiner Zahl $r \in \mathbb{R}^+$.

e) Falsch.
Die Stelle $\mathrm{i}\sqrt{5}$ ist eine Nullstelle des Polynoms $(z + 3)(z^2 + 5)$. Der Realteil dieser Nullstelle ist nicht negativ, damit ist das Polynom nicht stabil.