Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
A. Gündel-vom Hofe

SS 20
21. Juli 2020

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurswissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $v(x,y) = 2xy + y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $v(x,y)$ ist harmonisch.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $u(x,y)$ zu $v(x,y)$, so dass $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ analytisch in $\mathbb{C}$ ist und $f(2) = 3$ gilt. Geben Sie den Term $f(x+\mathrm{i}y)$ an.

c) Leiten Sie aus der Abbildungsvorschrift für $f(x+\mathrm{i}y)$ eine Darstellung der Form $w = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, her.

2. Aufgabe 8 Punkte

In der komplexen Ebene seien der im Ursprung zentrierte und im positiven Sinn durchlaufene Einheitskreis durch $\circlearrowleft$ und die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse durch $\longrightarrow$ symbolisiert.

Gesucht ist eine Möbius-Transformation f, welche die Gleichung $f(\mathrm{i}) = 0$ erfüllt und $\circlearrowleft$ und $\longrightarrow$ vertauscht: $f(\circlearrowleft) = \longrightarrow$ und $f(\longrightarrow) = \circlearrowleft$.

a) Ermitteln Sie aus geometrischer Betrachtung zunächst die Bilder $f(1)$ und $f(-1)$.

b) Leiten Sie mithilfe von a) die konkrete Abbildungsvorschrift $w = f(z)$ her.

c) Ermitteln Sie das Bild und das Urbild von ∞, also $f(\infty)$ sowie $f^{-1}(\infty)$.

Hinweis zu a): Eine Skizze ist unbedingt hilfreich.

3. Aufgabe 11 Punkte

In der komplexen Ebene seien die Kurven $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{C}_b$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_a: &\quad z_a(t) = t + \mathrm{i}, \quad -\infty < t < \infty, \\ \mathcal{C}_b: &\quad z_b(s) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}, \quad 0 \leqslant s < 2\pi. \end{aligned}$$

Weiter sei die komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z-\mathrm{i})^3$ gegeben. Diese Funktion f bildet die Kurven $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{C}_b$ auf die Bildkurven $f(\mathcal{C}_a) = \tilde{\mathcal{C}}_a$ bzw. $f(\mathcal{C}_b) = \tilde{\mathcal{C}}_b$ ab.

a) Skizzieren Sie die beiden Kurven $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{C}_b$.

b) Bestimmen Sie die beiden Schnittpunkte z_1 und z_2 von $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{C}_b$ sowie die beiden Schnittpunkte w_1 und w_2 der Bildkurven $\tilde{\mathcal{C}}_a$ und $\tilde{\mathcal{C}}_b$.

c) Bestimmen Sie in den Punkten z_1 und z_2 jeweils die Schnittwinkel α_1 und α_2 von $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{C}_b$ sowie in den Punkten w_1 und w_2 jeweils die Schnittwinkel $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$ von $\tilde{\mathcal{C}}_a$ und $\tilde{\mathcal{C}}_b$.

Hinweis: Die Bildkurven $\tilde{\mathcal{C}}_a$ und $\tilde{\mathcal{C}}_b$ brauchen nicht skizziert zu werden.

4. Aufgabe

12 Punkte

Das Gebiet $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < y < 0\}$ stellt ein Winkelgebiet im III. Quadranten dar.

Gesucht ist eine in G zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{für } (x,y) \in G;\\ u(x,0) &= x^2 && \text{für } x < 0;\\ u(x,y) &= -4x^2 && \text{für } x = y < 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Dieses Randwertproblem soll mittels der Methode der harmonischen Verpflanzung durch Verwendung der analytischen Funktion $\tilde{z} = f(z) = z^2$ gelöst werden.

a) Skizzieren Sie zunächst das Gebiet G sowie das Bildgebiet $H = f(G)$.

b) Transformieren Sie mittels f das in G gegebene Randwertproblem $(*)$ in ein entsprechendes Randwertproblem in H für eine gesuchte zweimal stetig differenzierbare Funktion $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (\tilde{x},\tilde{y}) \mapsto U(\tilde{x},\tilde{y})$.

c) Lösen Sie mithilfe der harmonischen Ansatzfunktionen $U_1(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}$, $U_2(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{y}$ das Randwertproblem für $U(\tilde{x},\tilde{y})$ in H.

d) Ermitteln Sie mithilfe von $U(\tilde{x},\tilde{y})$ dann die gesuchte harmonische Lösung $u(x,y)$ für das ursprüngliche Randwertproblem $(*)$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Kurvenintegrale aus:

$$\text{a)} \int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t.$$

Bitte zur Aufgabe 6 wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to |z|^2$ ist in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z = 0$ komplex-differenzierbar.

b) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \ln\left|\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\arg(x + \mathrm{i}y)\right|$ ist in der oberen Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ harmonisch.

c) Es gibt eine Möbius-Transformation, die den Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ auf den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$ abbildet.

d) Es gilt die Gleichung

$$\int_{|z|=1} z^5 \mathrm{e}^{1/z^2}\, \mathrm{d}z = \frac{\pi \mathrm{i}}{3}.$$

e) Wenn eine komplexe Funktion f eine isolierte Singularität z_0 mit der Eigenschaft $\operatorname{Res}(f, z_0) \neq 0$ besitzt, so ist die Singularität z_0 eine Polstelle 1. Ordnung.