Musterlösung Klausur Analysis III f. Ing. vom 21. Juli 2020

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Es ist

$$\Delta v(x,y) = v_{xx} + v_{yy} = 0 + 0 = 0.$$

b) Weil f analytisch ist, gelten die Cauchy-Riemann-DGL:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 2x+1, \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y) = -2y.$$

Integrationen liefern für $u(x,y)$

$$u(x,y) = x^2 + x + g(y) = -y^2 + h(x)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen g und h.

Alles geht auf mit der Setzung $g(y) = -y^2 + K$ und $h(x) = x^2 + x + K$ mit einer beliebigen Konstanten K. Es ist

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + x + K + \mathrm{i}(2xy + y).$$

Mit $f(2) = 3$ ergibt sich $K = -3$. Somit ist

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x - 3,$$

Es ist nun

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + x - 3 + \mathrm{i}(2xy + y).$$

c) Man erkennt $z = x + \mathrm{i}y$ und $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, so dass

$$f(z) = z^2 + z - 3$$

gilt.

2. Aufgabe

8 Punkte

a) $\circlearrowleft$ und $\longrightarrow$ schneiden sich in 1 und -1.
Es kann also nur $f(1) = 1, f(-1) = -1$ oder $f(1) = -1, f(-1) = 1$ gelten.
$\circlearrowleft$ beschreiben wir als Kreis, der durch $1, \mathrm{i}, -1$ in dieser Reihenfolge läuft, und $\longrightarrow$ als Kreis durch $-1, 0, 1$. Das Bild von $\circlearrowleft$ ist $\longrightarrow$, das dann durch $f(1), 0, f(-1)$ festgelegt wird. Weil $\longrightarrow$ von links nach rechts läuft, bleibt nur $f(-1) = 1, f(1) = -1$.

b) Mit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist

$$f(1) = -1 \implies a + b = -c - d, \qquad f(-1) = 1 \implies -a + b = -c + d,$$
$$f(0) = \mathrm{i} \implies b = \mathrm{i}d$$
$$\implies b = -\mathrm{i}a, \quad c = \mathrm{i}a, \quad d = -a$$
$$\implies f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z - 1}.$$

c)
$$f(\infty) = -\mathrm{i}, \qquad f^{-1}(\infty) = -\mathrm{i}.$$

(f vertauscht die Punkte ∞ und $-\mathrm{i}$.)

3. Aufgabe 11 Punkte

a) (Bildchen)

b) α) Die Schnittpunkte mit Pythagoras finden.

β) Zu lösen ist

$$t + \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ — also

$$t + \mathrm{i} = 2\cos s + 2\mathrm{i}\sin s.$$

Es ist $\sin s = \frac{1}{2}$, also $s = \frac{\pi}{6}$ und $s = \frac{5\pi}{6}$, mit $t = 2\cos s$ also $t = \sqrt{3}$ bzw. $t = -\sqrt{3}$.

Man hat

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Es ist

$$w_1 = f(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3} \text{ und } w_2 = f(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (-\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3}.$$

c) Es ist

$$\dot{\mathcal{C}}_a(t) = 1, \quad \dot{\mathcal{C}}_b(s) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}.$$

<u>Schnittpunkt $\sqrt{3} + \mathrm{i}$:</u>

$$\dot{\mathcal{C}}_a(\sqrt{3}) = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}, \quad \dot{\mathcal{C}}_b(\tfrac{\pi}{6}) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

also $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$.

<u>Schnittpunkt $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$:</u>

$$\dot{\mathcal{C}}_a(-\sqrt{3}) = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}, \quad \dot{\mathcal{C}}_b(\tfrac{5\pi}{6}) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}.$$

$\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$ Das ist ein überstreckter Winkel; gleichwertig dazu ist der spitze Winkel $\frac{\pi}{3}$.

Die Funktion f hat die Ableitung $3(z-\mathrm{i})^2$. Die Funktion f ist analytisch,. Die Ableitung ist an den Schnittpunkten $\pm\sqrt{3} + \mathrm{i}$ von Null verschieden. Damit stellt die Funktion f an diesen Schnittpunkten eine winkeltreue Abbildung dar.

Die Bildkurven $f(\mathcal{C}_a)$ und $f(\mathcal{C}_b)$ schneiden sich in w_1 also mit dem Winkel $\tilde{\alpha}_1 = \frac{2\pi}{3}$ und in w_2 mit dem Winkel $\tilde{\alpha}_2 = \frac{\pi}{3}$.

4. Aufgabe

12 Punkte

a) Skizzen von G und H

b) Die Verpflanzungsabbildung f entspricht im $\mathbb{R}^2$ der Abbildung

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Für die Funktion U mit $U = u \circ f^{-1}$ gilt mit $x < 0$:

$$u(x, 0) = x^2 = U(x^2, 0) \quad , \quad u(x, x) = -4x^2 = U(0, 2x^2) \quad .$$

Die Funktion U löst das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\Delta U(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in H, \\ &U(\tilde{x}, 0) = \tilde{x} \quad \text{für } \tilde{x} > 0 \\ &U(0, \tilde{y}) = -2\tilde{y} \quad \text{für } \tilde{y} > 0. \end{aligned}$$

c) Mit dem Ansatz

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}) = A\tilde{x} + B\tilde{y}$$

findet man sofort $A = 1$ und $B = -4$ und damit

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} - 2\tilde{y}.$$

d) Mit $u = U \circ f$ findet man die Lösung des gestellten Randwertproblems:

$$u(x, y) = U(x^2 - y^2, 2xy) = x^2 - y^2 - 4xy.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Der Kreis $|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}$ liegt in der oberen Halbebene und damit vollständig im Analytizitätsgebiet des komplexen Logarithmus $\log z$.

Damit liefert C.I.F.:

$$\int\limits_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} \frac{\log z}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\big(\log z\big)_{|z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\cdot(\ln 1+\mathrm{i}\arg\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2} = -\pi^2.$$

b) Es gilt

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{5+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{-1}}{5+3z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z(5+3z)}\,\mathrm{d}z$$

Die Nullstellen des Nenners des Integranden sind 0 und $-\frac{5}{3}$. Es ist möglich, die Cauchysche Integralformel anzuwenden:

$$-\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z(5+3z)}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{(5+3z)^{-1}}{z}\,\mathrm{d}z\,;$$

denn die Funktion $(5+3z)^{-1}$ ist analytisch auf einer Umgebung des Einheitskreises, z.B. in der offenen Kreisscheibe $|z|<\frac{4}{3}$.

Die Cauchysche Integralformel kann angewendet werden:

$$-\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{(5+3z)^{-1}}{z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left((5+3z)^{-1}\right)_{|z=0} = -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

Antwort:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{5}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Mit $|x+\mathrm{i}y|^2 = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ gilt $u(x,y) = x^2+y^2$ und $v(x,y) = 0$. Die C-R-DGL $u_y = -v_x$ ergibt die Aussage $2y = 0$, was für $z = \mathrm{i}$ falsch ist.

b) Wahr.
Es ist mit $x + \mathrm{i}y = z$ zunächst

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arg(x+\mathrm{i}y) = \log z$$

Liegt z in der komplexen oberen Halbebene, so gilt $\operatorname{Im}\log z \neq 0$, d.h. die Werte $\log z$ bei $\operatorname{Im} z > 0$ liegen im Schlitzgebiet $\{z' \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z' > 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z' \neq 0\}$.

Man kann nun schreiben

$$h(x+\mathrm{i}y) = \operatorname{Re}(\log(\log z)).$$

Die Komposition $\log\log z$ ist in der oberen Halbebene analytisch, damit ist der Realteil harmonisch.

c) Falsch.
Die begrenzenden Kreise $|z| = 1$ und $|z| = 2$ schneiden sich nicht. Die begrenzenden Geraden $\operatorname{Re} z = 1$ und $\operatorname{Re} z = 2$ haben aber einen Schnittpunkt, nämlich den Punkt ∞. Bei Möbius-Transformationen sind die Bilder von Schnittpunkten wieder Schnittpunkte. Damit ist es nicht möglich, einen Kreisring mit einer Möbius-Transformation auf einen Streifen abzubilden.

d) Wahr.
Mit der Exponentialreihe ergibt sich

$$\int_{|z|=1} z^5 \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-2n}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} z^5 \cdot \frac{1}{3!} z^{-6}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{3!} = \frac{\pi\mathrm{i}}{3}.$$

e) Falsch.
Man wähle $f(z) = z^{-2} + z^{-1}$. Es gilt $\operatorname{Res}(f,0) = 1 \neq 0$, aber f hat bei 0 einen Pol 2. Ordnung.