Klausur 26.07.2023

gewidmet an Herrn S. N. □ □

Aufgabe 1 (9 Punkte)

An welchen Stellen ist die Funktion $f(z) = z \cdot |z|^2$ komplex differenzierbar?

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_C \frac{1}{z-1}\,dz, \quad C: t \to t + 2it, \quad -1 \le t \le 1$$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)\cdot(z+3)}\,dz$$

Aufgabe 3 (9 + 4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale. Begründung der Sätze nicht erforderlich.

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(e^{i\pi z}-1)\cdot(z-1)}\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\,dz$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \\ u(x,0) &= x^2 \\ u(x,-x) &= 2x^2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie es mit der Verpflanzungsfunktion $f(z) = iz^2$ und nutzen Sie dann den Ansatz $Ax + By$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Finden Sie eine Möbiustransformation mit folgenden Eigenschaften:

Die von links-nach-rechts laufende reelle Achse → die von oben-nach-unten laufende imaginäre Achse.

Der Kreis mit Mittelpunkt und Radius $\frac{1}{2}$ → die von rechts-nach-links laufende reelle Achse.

Außerdem gilt $T(\frac{1}{2}) = -2i$.

Was passiert mit der von oben-nach-unten laufenden imaginären Achse mit ihrer gefundenen Möbiustransformation?

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 Punkte)

Begründen Sie ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

$$\int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{z-1}\, dz = -1$$

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi i$$

Das Polynom $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 4$ ist stabil.