

Rechenwege und Begründungen nicht vergessen!

1. Aufgabe

(6 Punkte)

Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion der Kurve

$$c(t) = (6 \cos(t) + 2, 3 \cos(t), 2 \cos(t) + 7 \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe

(6 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$S = \{(x, y, \sqrt{8 - x^2 - y^2}) \mid x > 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1 - y^2}{1 - x} y^{-1}, \quad y(0) = 2.$$

4. Aufgabe

(7 Punkte)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y-1}} \sinh(y)$.

- i) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D an (mit Skizze).
- ii) Ist D offen, abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen?
- iii) Ist f differenzierbar auf D ?
- iv) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen im Punkt $(1, 2, f(1, 2))$ auf.

5. Aufgabe

(6 Punkte)

Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - xy + x - 7y + \frac{1}{3}\right),$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Typ der Extremstellen.

6. Aufgabe

(4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf \mathbb{R}^2 stetig ist.

7. Aufgabe

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y - 1 = 2x.$$

Zusatzaufgabe

(2 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$