WS 97/98

Aufgabe 1:
Bestimme die lokalen Maxima, die lokalen Minima und die Sattelpunkte der Funktion

a) $f(x, y) = x^4 - y^2 - 2x^2$.

b) $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$

4,0	

Aufgabe 2:
Sei $B := \{(x, y) \mid x^2 \le y,\ y^2 \le x\}$, das durch die Kurven $x^2 - y = 0$ und $y^2 - x = 0$ eingeschlossene Gebiet.

a) Berechne den Flächeninhalt von B.

b) Berechne $\iint\limits_B 6xy\, dx\, dy$.

3,0	

Aufgabe 3:
Berechne die Fläche des Graphen von $f(x, y) = x \cdot y + 1$ über der Einheitskreisscheibe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

3,0	

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, \sqrt{2}e^{-t}),\ t \in \mathbb{R}$.

Sei $T > 0$. Berechne die Länge des Kurvenstücks $\{\vec{x}(t) \mid -T \le t \le \infty\}$.

3,0	

Aufgabe 5:
Gib die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

i) $y' = \frac{1}{3} x^2 (y^2 - 2y + 1)$

ii) $y''' - 2y'' + 2y' = 6x$

iii) $y'' + 4y = \sin 2x + e^x$.

4,0	

Aufgabe 6:
Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

werde 2π-periodisch fortgesetzt.

$$S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

sei die zugehörige Fourierreihe. Berechne die Koeffizienten a_n, b_n.

3,0	

Aufgabe 7:

10/25 bestanden

Man betrachte

a) die hyperbolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

b) die elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

c) die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

auf $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \}$ mit Randbedingung $u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$.

Dabei ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion mit $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

Frage: Welche Differentialgleichung hat die Eigenschaft, daß die Lösung $x \to u(x, y)$ für $y > 0$ glatter als die Funktion f, d.h. mindestens stetig wird?

Gib eine Begründung. Dabei muß die Lösung nicht unbedingt explizit gerechnet werden.

5,0	