Gesprächsprotokoll: Beanspruchungsgerechtes Konstruieren

Schriftlich: 29.09.2008 Mündlich: 01.10.2009

1) Schriftlich (60min)

1.1 Turbinenscheibe als Scheibe gleicher Festigkeit (5P)

Geg.: Durchmesser der Scheibe $D = 1100mm$
Schwerpunktabstand der Schaufeln $r_S = 600mm$
Anzahl der Schaufeln $z = 250$
Drehzahl der Scheibe $n = 3000\,min^{-1}$
Gewicht einer Schaufel $m = 0{,}5\,kg$
Dichte $\rho = 7{,}85\,kg/m^3$

a) Höhenverlauf $h(r)$ aus DGL herleiten wenn gelten soll $\sigma_\varphi(r) = \sigma_r(r) = const. = \sigma_0$

Geg.: $[\sigma_r h(r) r]\frac{d}{dr} + \rho r^2\omega^2 h(r) - \sigma_\varphi h(r) = 0$

Lösung: $\sigma_0 h'(r) r + \cancel{\sigma_0 h(r)} + \rho r^2\omega^2 h(r) - \cancel{\sigma_0 h(r)} = 0$

$\Rightarrow \sigma_0 h'(r) \cancel{r} + \rho r^{\cancel{2}}\omega^2 h(r) = 0$

Ansatz: $h'(r) = \frac{dh}{dr}$?

$\Rightarrow \sigma_0 \frac{dh(r)}{dr} + \rho r\omega^2 h(r) = 0$

$\int \frac{1}{h(r)} dh(r) = -\int \frac{\rho r \omega^2}{\sigma_0} dr$

$\Rightarrow \ln h(r) + C_1 = -\frac{\rho r^2\omega^2}{2\sigma_0} + C_2$

$\Rightarrow h(r) = h_0 e^{-\frac{\rho r^2 \omega^2}{2\sigma_0}}$ ← man kann sich viel Arbeit ersparen, wenn man die Formel weiss

b) Volumennutzungsgrad der höhenoptimierten Scheibe

$\eta_A = 1$

c) Höhe der Scheibe an der Stelle $r = \frac{D}{2}$, wenn gelten soll $\sigma = 70\frac{N}{mm^2}$

Lösung: Turbinenschaufeln erzeugen eine Fliehkraft auf die Mantelfläche der Scheibe

Fliehkraft: $F = z \cdot m \cdot n^2 \cdot r_S = 250 \cdot 0{,}5kg \cdot \left(\frac{3000}{60}\right)^2 \cdot 0{,}6m = 187{,}5\,kN$

Mantelfläche: $A_M = h(r=\frac{D}{2}) \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$

$\Rightarrow \sigma = \frac{F}{A_M} \Rightarrow h(r=\frac{D}{2}) = \frac{F}{\sigma \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}} = \frac{187{,}5\,kN}{70\frac{N}{mm^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1100mm}{2}} = 0{,}78\,mm$

d) Höhe der Scheibe an der Stelle $r = 0$, also h_0

Lösung: $h(r=\frac{D}{2}) = h_0 e^{-\frac{\rho \frac{D^2}{4} \omega^2}{2\sigma}}$

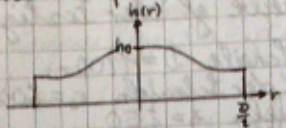
$$\Rightarrow h_0 = h\left(r=\frac{D}{2}\right) e^{\frac{\rho \frac{R^2}{2}\omega^2}{2\sigma}}$$

$$\Rightarrow h_0 = 0{,}78\,\text{mm}\, e^{\frac{7{,}85\frac{kg}{dm^3}\left(\frac{1{,}1m}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3000}{60s}\right)^2}{2\cdot 70\frac{kg\,m\cdot 1000000}{s^2\ \ m^2}}} = 0{,}78\,\text{mm}\, e^{0{,}0424} = 0{,}81\,\text{mm}$$

Winkelgeschwindigkeit w = 2 * pi * n
hier falsch : w = n

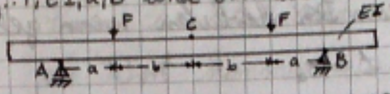
$\frac{N}{mm^2} \hat{=} \frac{kg\,m}{s^2}\,\frac{1}{mm^2}$

e) Höhenverlauf der Scheibe zeichnen



1.2 Satz von Castigliano (schwach gekrümmt) (5P)

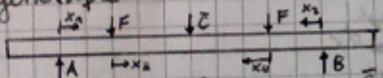
Geg.: F, EI, a, b und Normal- und Querkräfte vernachlässigen



Ges.: Durchsenkung an Stelle C

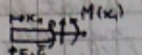
Lösung: Einführung einer virtuellen Kraft $\bar{C}$ an Stelle C und diese später gleich Null setzen.

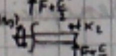
Lagerkräfte:

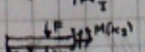


Symmetrie: $A = F + \frac{\bar{C}}{2}$; $B = F + \frac{\bar{C}}{2}$

Momentenverlauf:

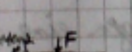
$0 \le x_1 \le a$:  $M(x_1) = Fx_1 + \frac{\bar{C}}{2}x_1$

$0 \le x_2 \le a$:  $M(x_2) = Fx_2 + \frac{\bar{C}}{2}x_2$

$0 \le x_3 \le b$:  $M(x_2) = \left(F + \frac{\bar{C}}{2}\right)(x_3 + a) - Fx_3$

$$= Fx_3 + \frac{\bar{C}}{2}x_3 + Fa + \frac{\bar{C}}{2}a - Fx_3$$

$$= Fa + \frac{\bar{C}}{2}a + \frac{\bar{C}}{2}x_3$$

$0 \le x_4 \le b$:  $M(x_4) = \left(F + \frac{\bar{C}}{2}\right)(x_4 + a) - Fx_4 = Fa + \frac{\bar{C}}{2}a + \frac{\bar{C}}{2}x_4$

Verschiebung: $$v_c = \lim_{\bar{C}\to 0}\frac{\partial W}{\partial \bar{C}} = \lim_{\bar{C}\to 0}\left[\int_0^a \frac{M(x_1)}{EI}\frac{\partial M(x_1)}{\partial \bar{C}}dx_1 + \int_0^a \frac{M(x_2)}{EI}\frac{\partial M(x_2)}{\partial \bar{C}}dx_2 + \int_0^b \frac{M(x_3)}{EI}\frac{\partial M(x_3)}{\partial \bar{C}}dx_3 + \int_0^b \frac{M(x_4)}{EI}\frac{\partial M(x_4)}{\partial \bar{C}}dx_4\right]$$

Symmetrie: $(M(x_1) = M(x_2))$ $(M(x_3) = M(x_4))$

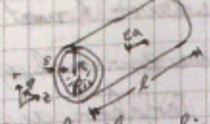
$$v_{\bar{C}} = 2\cdot\lim_{\bar{C}\to 0}\left[\int_0^a \frac{(F + \frac{\bar{C}}{2})x_1}{EI}\cdot\frac{1}{2}x_1\,dx_1 + \int_0^b \frac{Fa + \frac{\bar{C}}{2}a + \frac{\bar{C}}{2}x_3}{EI}\cdot\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x_3\right)dx_3\right]$$

$$= 2\cdot\lim_{\bar{C}\to 0}\left[\frac{F + \frac{\bar{C}}{2}}{6EI}a^3 + \frac{1}{EI}\int_0^b\left(\frac{1}{2}Fa^2 + \frac{1}{4}\bar{C}a^2 + \frac{1}{4}\bar{C}ax_3 + \frac{1}{2}Fax_3 + \frac{1}{4}\bar{C}x_3 + \frac{1}{4}\bar{C}x_3^2\right)\right.$$

$$= 2\cdot\left(\frac{Fa^3}{6EI} + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Fa^2b + \frac{1}{4}Fab^2\right)\right) = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{EI} + \frac{Fab^2}{2EI}$$

1.3 Rohr mit Riss und Innendruck (5P)

Geg.: K_{Ic}, s, R, l, Y_{Geom}



Ges.: Beschreiben Sie mit Formeln, Sätzen wie man auf den maximalen Innendruck $p_{i,max}$ wenn sich der Riss nicht ausweiten darf.

Lösung: Zunächst müssen die Spannungen am Bauteilrand berechnet werden.

$\sigma_{z,Rand} = 0$ da keine Zugkräfte vorhanden

$\sigma_{r,Rand} = 0$ da kein Außendruck

Kesselformel: $\sigma_{\varphi,Rand} = \frac{p_{imax} \cdot d}{D-d} = \frac{p_{imax} \cdot (2R-2s)}{2R-(2R-2s)} = \frac{p_{imax}(R-s)}{s}$

Bruchmechanische Bewertungsgleichung

$K_{Ic} \leq \sigma_{\varphi,Rand} \cdot \sqrt{\pi a} \cdot Y_{Geom}$

Nach p_{imax} auflösen: $p_{imax} \leq \frac{K_{Ic} \cdot s}{(R-s)\sqrt{\pi a} \cdot Y_{Geom}}$

1.4 Zeitfestigkeit: Örtliches Konzept (5P)

Geg.: Nennamplitudenspannung $\sigma_{n,a} = 100 \frac{N}{mm^2}$

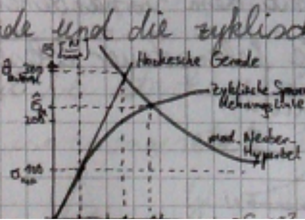
Kerbwirkungszahl $\beta_k = 3$

Elastizitätsmodul $E = 220000 \frac{N}{mm^2}$ und gekerbter Zugstab

a) Örtliche Spannungs- und Dehnungsamplitude

$\hat{\sigma}_{a,örtl} = \sigma_{n,a} \cdot \beta_k = 300 \frac{N}{mm^2}$ $\quad \hat{\varepsilon}_{a,örtl} = \frac{\hat{\sigma}_{a,örtl}}{E} = 0{,}14 \cdot 10^{-2}$

b) Bei Teilaufgabe war ein Diagramm gegeben und man sollte die Spannungen einzeichnen, sowie die Kurven modifizierte Neuber-Hyperbel, Hookesche Gerade und die zyklische Spannungs-Dehnungslinie.



untere Neuberspannung: $\check{\sigma} = \frac{\sigma_{n,a}}{\alpha_k} = \frac{100 \frac{N}{mm^2}}{1} = 100 \frac{N}{mm^2}$

untere Neuberdehnung: $\check{\varepsilon} = \frac{\check{\sigma}}{E} = 0{,}045 \cdot 10^{-2}$

Kerbgrundspannung: $\hat{\sigma}_a$

c) Beschreiben Sie mit Formeln, Sätzen und Diagrammen, wie man von einer nicht wechselnden Beanspruchung auf die Lebensdauer kommt.

Lösung: $\sigma_m \neq 0$ das bedeutet man zweimal das modifizierte Neuber-Hyperbel-Verfahren anwenden. Einmal für die obere Nennspannung $\sigma_{n,o}$ und einmal für die Nennspannungsamplitude $\sigma_{n,a}$.

$$\sigma_{n,o} \; ; \; \sigma_{n,a} \Rightarrow \hat{\sigma}_o \text{ und } \hat{\varepsilon}_a$$

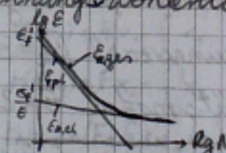
Hieraus kann man den vorhandenen Schädigungsparameter berechnen. $P_{SWT,vorh} = \sqrt{\hat{\sigma}_o \cdot \hat{\varepsilon}_a \cdot E}$

Um den zulässigen zu bekommen, spaltet man die Dehnungsamplitude $\varepsilon_{a,ges}$ aus der zyklischen Spannungs-Dehnungslinie in einen plastischen und elastischen Teil auf. $\varepsilon_{a,ges} = \varepsilon_{a,pl} + \varepsilon_{a,el}$

Die Anteile werden mit den Coffin-Manson-Gleichungen beschrieben

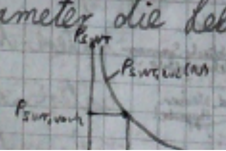
$$\varepsilon_{a,pl} = \varepsilon'_f (2N)^c \; ; \; \varepsilon_{a,el} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b$$

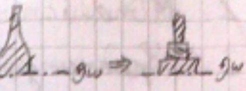
und mit dem Dehnungswöhlerdiagramm veranschaulicht.



Den zulässigen Schädigungsparameter bekommt man $P_{SWT,zul} = \sqrt{\sigma_a \varepsilon_a E} = \sqrt{\varepsilon_{a,el} \cdot E \cdot \varepsilon_{a,ges} \cdot E} = \sqrt{\varepsilon_{a,el} \cdot E \cdot (\varepsilon_{a,el} + \varepsilon_{a,pl}) \cdot E}$

Damit ist $P_{SWT,zul}$ eine Funktion von N. Wenn man diese im Schädigungsparameterwöhlerdiagramm aufzeichnet, kann man mit dem vorhandenen Schädigungsparameter die Lebensdauer ablesen.



- FEM
- mit mehreren Scheiben annähern 

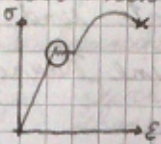
Fazit: Für die Schriftliche nur Testate und Übungsaufgaben rechnen. Keine Hausaufgaben.

Mündliche: Liebich erklärt gerne, deswegen z.B. bei mir beim Schnadt-Schaubild habe 4 min ununterbrochen geredet um ihn nicht zu Wort kommen zu lassen.
Jules stellt gerne fiese Fragen, aber als ich bei starkgekrümmten Castigliano versagt hatte, war er nett und ist zu Scheiben übergegangen.

2) Mündlich

2.1 Spannungs-Dehnungsdiagramm (duktiler Werkstoff)

Wieso sieht diese Linie so aus? Speziell da ⊖



Lösung: Beim Messversuch wird immer die wahre Dehnung mit der Ingenieursspannung verglichen.

wahre Spannung: $\sigma = \frac{F}{A}$ Ingenieursspannung: $\sigma = \frac{F}{A_0}$

Dadurch weicht die Kurve bei Beginn der Einschnürung von der Hookeschen Gerade ab.

2.2 Spannungskonzepte

- Nennspannungskonzept
  Eine Kerbe vermindert zulässige Spannung, d.h. Berücksichtigung der Kerbe in der zulässigen Spannung.
  Nachteil, Vorteil, Aufwand
- Kerbspannungskonzept
  Eine Kerbe erhöht die örtliche Spannung, d.h. Berücksichtigung der Kerbe in der vorhandenen Spanung mittels Kerbformzahl bzw. Kerbwirkungszahl
  Nachteil, Vorteil, Aufwand

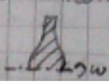
2.3 Schnadt-Schaubild

- Zugversuch von Ludwig
- Mehrachsigkeit, Spannungsversprödung
- Schnadt-Schaubild komplett erklären. Wichtig im Schaubild ist $\overset{\tau}{\llcorner}\!\to\sigma$ die wahre Spannung.

2.4 Sätze von Castigliano (stark gekrümmt)

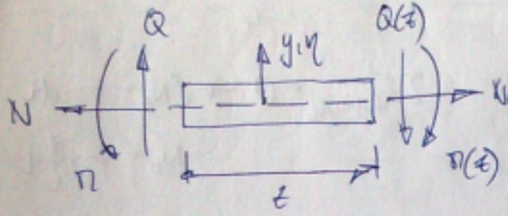
- Unterschiede zwischen schwach und stark.
- Kraft bei stark gekrümmt: $F^* = N + \frac{M}{R}$

2.5 Zusammengesetzte Scheiben

Geg.:  Ges.: Berechnungsmethoden

Beko II - Übung 7.6.2006

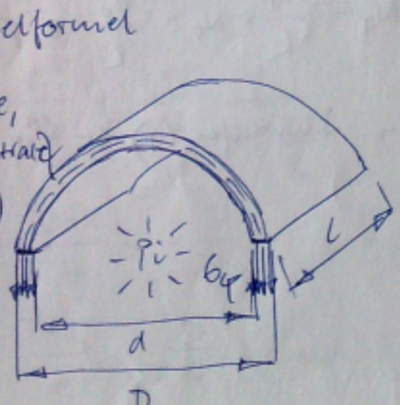
Satz von Castigliano für stark gekrümmte Balken

Gerader Balken $R \to \infty$	Stark gekrümmter Balken R<
	
	$F^* = N(\varphi) + \frac{M(\varphi)}{R} = N + \frac{M}{R} = \text{const}$ → nur rei… Lasten
Normalkraft: $F = N$	
FTM : $I = \int y^2 dA = \int \eta^2 dA$	$Z = \int_A \frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{R}}$
Nennspg. : $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{I} y = \frac{F}{A} + \frac{M}{I}\eta$	$\sigma = \frac{F^*}{A} + \frac{M}{Z} \cdot \frac{\eta}{1+\frac{\eta}{R}}$
FÄE : $W = \int \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA}\right) ds$	$W = \int \left(\frac{M^2}{2EZ} + \frac{F^{*2}}{2EA}\right) ds$ nicht zu vernachl…

Aufgabe: 5.1 Ring unter Innendruck

a) Kesselformel

Mittellinie, nicht neutrale Faser (NF)



Annahme: $\sigma_\varphi = \text{const}$
$\neq f(r)$

Vertikales Kraftgleichgewicht

$F_{Druck} = F_{Umfang}$; $\sigma = \frac{F}{A}$, F…

$p_i \cdot A_{Proj.} = \sigma_\varphi \cdot A_{Querschnitt}$ (2…

$p_i \cdot d \cdot L = \sigma_\varphi \cdot L \cdot (D-d)$

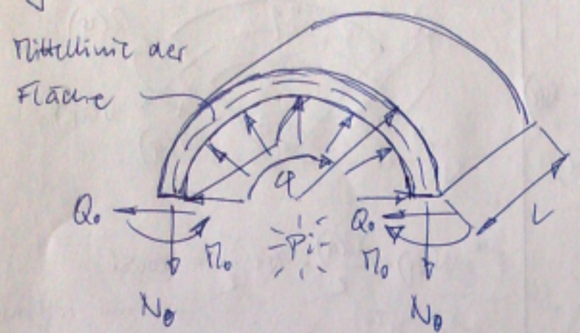
$\sigma_\varphi = p_i \cdot \frac{d}{D-d} = p_i \cdot \frac{\delta}{1-\ldots}$

$\delta = \frac{d}{D}$

5) Castigliano

1. Schritt: Symmetrie nutzen und statisch Unbestimmte ermitteln

Symmetrie:



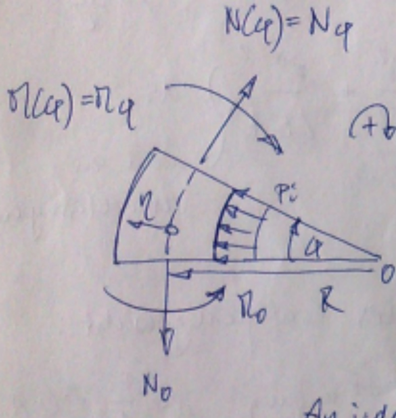
$$R = \frac{D+d}{4}$$

$\Sigma F_{vertikal} = 0 \rightarrow 2N_0 = p_i$

$N_0 = p_i$

$\Sigma F_{horizontal} = 0 \rightarrow Q_0 = 0$

Am Symmetrierand verschwindet antimetrische Querkraft (Ausnahme Lasteinleitung am Symmetrierand → symmetrische Aufteilung)



$\Sigma M_0 = 0$

$$0 = M_\varphi - M_0 - N_0 R + N_\varphi \cdot R$$

$$N_\varphi + \frac{M_\varphi}{R} = N_0 + \frac{M_0}{R} \equiv F^*$$

An jedem beliebigen Schnittufer (φ) ist $F^* =$ co

Ges.: $M_\varphi = M(\varphi)$?

$M(\varphi) = M_0$ 1. Symmetrie

2. Ettel

M_0 ist unbekannt → M_0: statisch Unbestimmt

7.6.200

Ecko II - Übung

Satz von Castigliano:

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0 = 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{M(\varphi)}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_0} R \, d\varphi + 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{F^*}{EA} \cdot \frac{\partial F^*}{\partial M_0} R$$

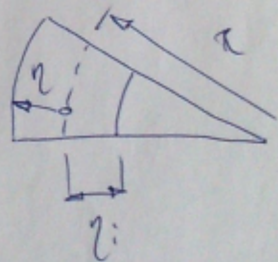
$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_0} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial F^*}{\partial M_0} = \frac{\partial}{\partial M_0}\left(N_0 + \frac{M_0}{R}\right) = \frac{1}{R}$$

$$0 = \frac{1}{I} \int_0^{\pi} M_0 \, d\varphi + \frac{1}{A} \int_0^{\pi} \left(\frac{M_0}{R} + N_0\right) \frac{A}{R} \, d\varphi$$

$$0 = \frac{M_0}{I} \pi + \frac{1}{A \cdot R}\left(M_0/R + N_0\right) \pi$$

$$M_0 = -\frac{N_0}{A \cdot R} \cdot \frac{1}{\frac{1}{I} + \frac{1}{A \cdot R^2}} = -N_0 \cdot \frac{1}{\frac{A}{I} \cdot R + \frac{1}{R}}$$

σ_φ (Innenrand) $\rightarrow \eta = \eta_i$



$$\sigma_\varphi = \frac{F^*}{A} + \frac{M}{I} \cdot \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{R}}$$

$$\eta_i = -\frac{D-d}{4} = -\frac{D}{4}(1-\delta)$$

$$R = \frac{D+d}{4} = \frac{D}{4}(1+\delta)$$

$\frac{Z}{I}$ aus Tabelle aus dem Bosch

$$I = \frac{L \cdot \left(\frac{D-d}{2}\right)^3}{12} \quad ; \quad \frac{e}{R} = \ldots \text{ für Tabelle}$$

$$\sigma_\varphi(\text{Innenrand}) = \frac{p_i}{1-\delta} \cdot \frac{(1+\delta)^3}{2(1+\delta)^2 + \frac{e}{3} \cdot \frac{Z}{I}(1-\delta)^2} \quad ; \quad \delta = \frac{d}{D}$$

$\tau = \eta a$

r in Tab. $\hat{=}$ unser R

b in Tab $\hat{=}$ unsere Länge