Beko
Liebich

Volumennutzungsgrad

23.07.16.
Vorbereitung
Test

$$\eta_A = \frac{\text{tatsächliche Arbeitsaufnahmefähigkeit}}{\text{max. mgl. Arbeitsaufnahmefähigkeit}}$$

$$\eta_A = \int_V \left(\frac{\sigma(x,y,z)}{\sigma_{max}}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}\, dV = \eta_{A,A} \cdot \eta_{A,z}$$

Flächennutzungsgrad: $\eta_{A,A} = \int_A \left(\frac{\sigma(x,y)}{\sigma_{max}}\right)^2 \frac{1}{A}\, dA$

Längennutzungsgrad: $\eta_{A,z} = \int_L \left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_{max}}\right)^2 \frac{1}{L}\, dz$

gilt nur für Balken

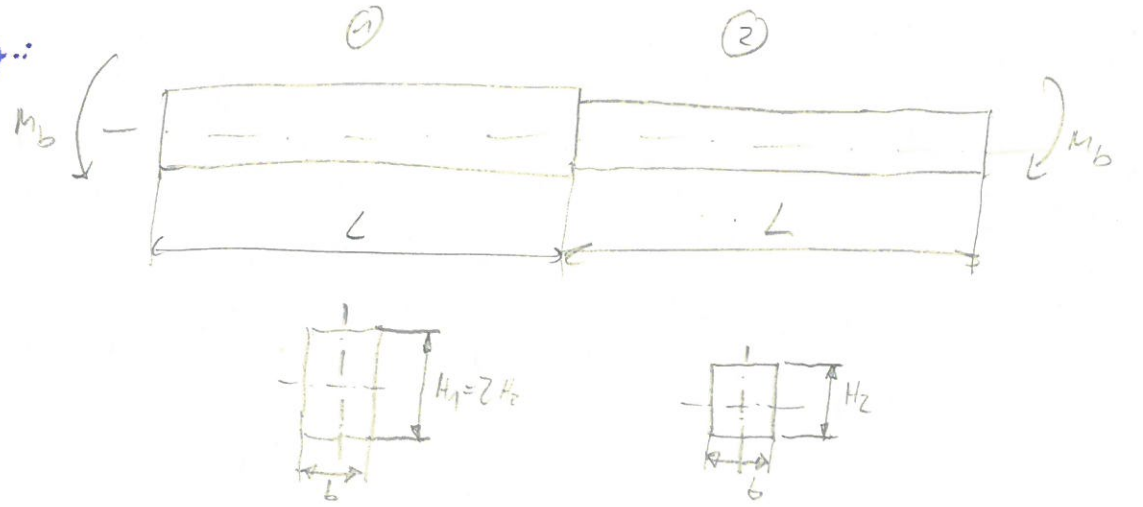
Zusammengesetzte Bauteile: $\eta_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{V_{ges}} \left(\eta_{A,A_i} \cdot \eta_{A,z_i}\right)$

Flächenträgheitsmoment / Widerstandsmoment:

$W_B = \frac{I_B}{e}$ $\qquad I_B = \int_A y^2\, dA$ $\qquad I_p = I_{By} + I_{Bz}$

Analytische Übung 1

geg.:



a) Bestimmen Sie den Volumennutzungsgrad η_A des dargestellten Trägers

b) Verbessern Sie den Volumennutzungsgrad, indem Sie das Bauteil als Bauteil gleicher Randfaserbeanspruchung.

auslegen. Variieren Sie dafür die Höhe des Trägers. Geben Sie den Verlauf der Höhe an und zeichnen Sie ihn.

c) Geben Sie den Volumennutzungsgrad des optimierten Trägers an.

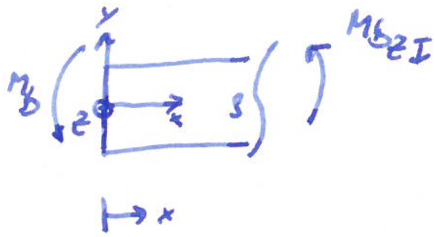
---

a) Momentenverlauf berechnen

2 Bereiche: I: $0 \le x \le L$

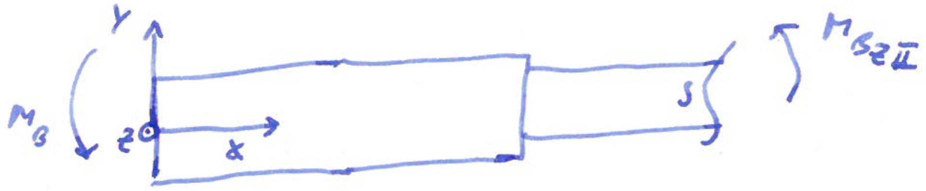
II: $L \le x \le 2L$

Bereich I



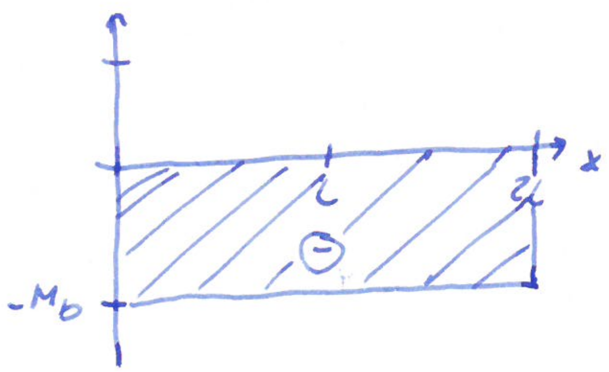
$$\sum M_{z,i}^{(S)} \overset{!}{=} 0 = M_b + M_{bzI} \Leftrightarrow M_{bzI} = -M_b$$

Bereich II



$$\sum M_{z,i}^{(S)} \overset{!}{=} 0 = M_b + M_{bzII} \Leftrightarrow M_{bzII} = -M_b$$

Momentenverlauf



Spannungen

$$\sigma_{bI} = \frac{|-M_b|}{W_{bI}} = \frac{6 \cdot M_b}{b\, 4 H_2^2} = \frac{3}{2}\frac{M_b}{bH_2^2}$$

$$\sigma_{bII} = \frac{|-M_b|}{W_{bII}} = \frac{6\, M_b}{bH_2^2} = \sigma_{max}$$

$$n_{A,A,I} = \frac{1}{A_I}\int_{A_I}\left(\frac{\sigma_1(z,y)}{\sigma_{max}}\right)^2 dA_I$$

$$\sigma_1(z,y) = \frac{M_b}{W_b(y,z)} = \sigma_{b_1}(y)$$

$$W_b(y,z) = \frac{I_b}{y} = \frac{b h_1^3}{12}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2}{3} b h_2^3 \frac{1}{y}$$

$$\sigma_1(z,y) = \frac{3}{2}\frac{M_b}{b h_2^3} y$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1(z, e_1) = \frac{3}{2}\frac{M_b}{b h_2^2}$$

$$n_{A,A_I} = \frac{1}{b\cdot 2h_2}\cdot\int_{-b/2}^{b/2} 1\, dz \cdot \int_{-h_2}^{h_2}\left(\frac{\frac{3}{2}\frac{M_b}{b h_2^3} y}{\frac{3}{2}\frac{M_b}{b h_2^2}}\right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2h_2}\cdot\int_{-h_2}^{h_2}\frac{y^2}{h_2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{6 h_2^3}\cdot\left[y^3\right]_{-h_2}^{h_2} = \frac{1}{6h_2^3}\left(h_2^3 + h_2^3\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$n_{A,A,II} \rightarrow$ analog 1 $= \frac{1}{3}$
da gleiche Querschnitts-form

Längenausnutzungsgrad

$$\eta_{A,Z} = \frac{1}{L} \int_L \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma_{max}} \right)^2 dx$$

$$\sigma_{max} = 6 \frac{M_b}{bH_2^2}$$

$$\sigma(x)_I = \frac{3}{2} \frac{M_b}{bH_2^2}$$

$$\sigma(x)_{II} = 6 \frac{M_b}{bH_2^2}$$

Bereich 1

$$\eta_{A,Z,I} = \frac{1}{L} \int_0^L 1 \, dx \cdot \left(\frac{\frac{3}{2}}{6} \right)^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

$$\eta_{A,Z,II} = \frac{1}{L} \int_0^L 1 \, dx \, (1)^2$$

$$= 1$$

Volumen/Volumenanteile

Bereich 1 : $V_1 = L \cdot b \cdot 2H_2$

Bereich 2 : $V_2 = L \cdot b \cdot H_2$

Gesamt : $V_{ges} = Lb(H_2 + 2H_2)$

$$= 3LbH_2$$

$$\frac{V_1}{V_{ges}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{V_2}{V_{ges}} = \frac{1}{3}$$

Volumenausnutzungsgrad

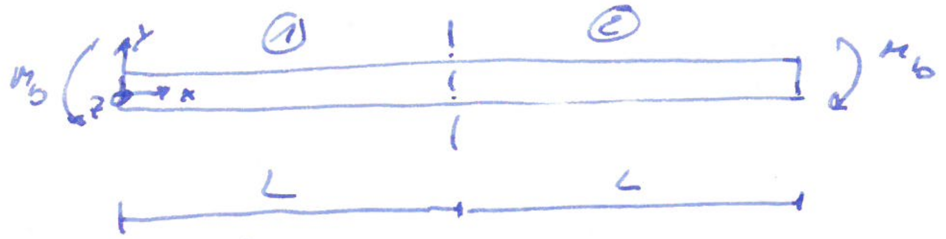
	I	II
$\eta_{A,A}$	$1/3$	$1/3$
$\eta_{A,Z}$	$1/16$	1
$\frac{V_i}{V_{ges}}$	$2/3$	$1/3$
$\frac{V_i}{V_{ges}} \cdot \eta_{A,A,i} \cdot \eta_{A,Z,i}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{72}$	$1/9 = \frac{8}{72}$
η_A	$9/72 = 1/8$	

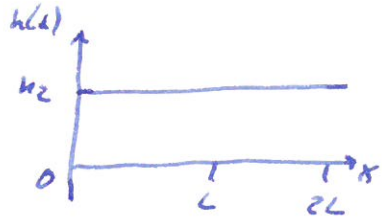
Beko
Liebich

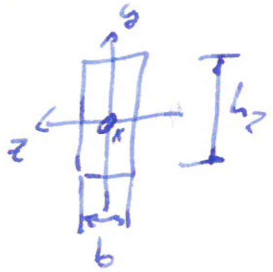
25.07.10
Vorbereitung
Test

b) Ziel: gleiche Randfaserspannung

Lösung: Balken überall gleich hoch

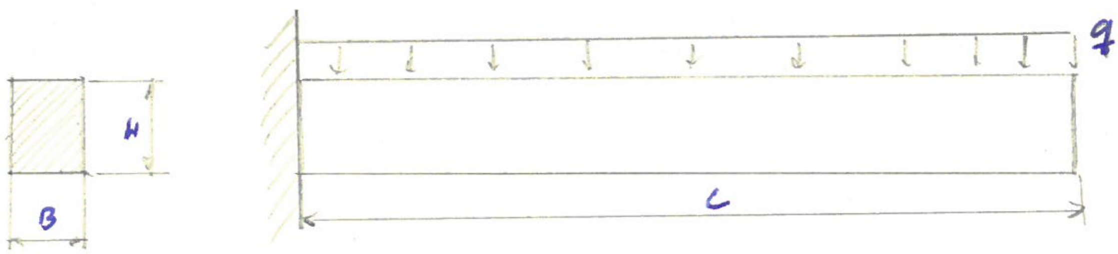






c) $\left.\begin{array}{l} \eta_{A1} = \frac{1}{3} \\ \eta_{A,2} = 1 \\ \eta_A = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ jetzt Betrachtung als ein Körper

Analytische Übung 2



Kragarm mit Streckenlast

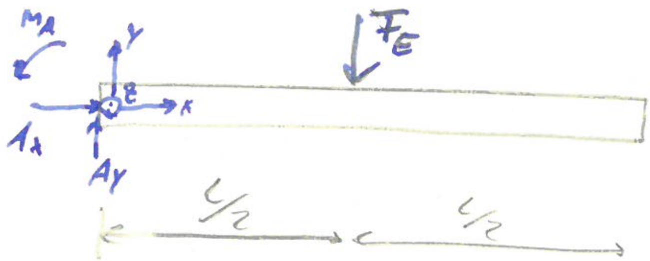
a) Bestimmen Sie den Volumennutzungsgrad η_A des dargestellten Trägers

b) Verbessern Sie den Volumennutzungsgrad, indem Sie das Bauteil als Bauteil gleicher Randfaser-beanspruchung auslegen. Variieren Sie die Höhe des Trägers. Geben Sie den Verlauf der Höhe an und zeichnen Sie ihn.

c) Geben Sie den Volumennutzungsgrad des optimierten Trägers an.

Achten Sie auf saubere Freischnitte inkl. Koordinatensystem

a) Freischnitt :



$F_E = q \cdot L$

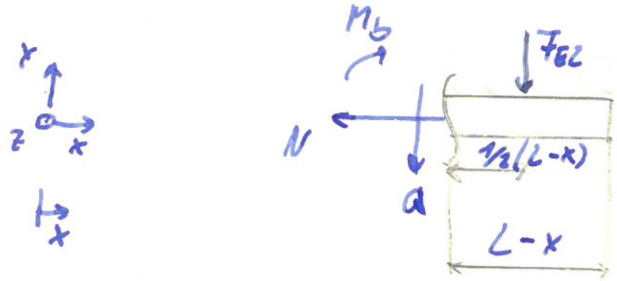
$A_y = F_E = q_z \cdot L$

$A_x = 0$

$M_A = \frac{l}{2} \cdot F_G = \frac{L^2}{2} q$

Schnittlastenfreischnitt

Bereiche I : $0 \leq x \leq L$



$F_{E2} = q \cdot (L - x)$

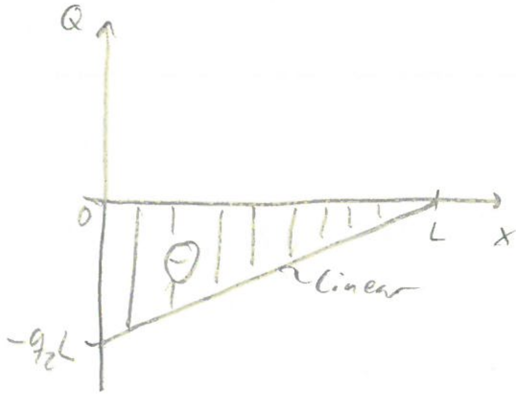
$Q(x) = -F_{E2} = q_z \cdot x - q_z \cdot L$

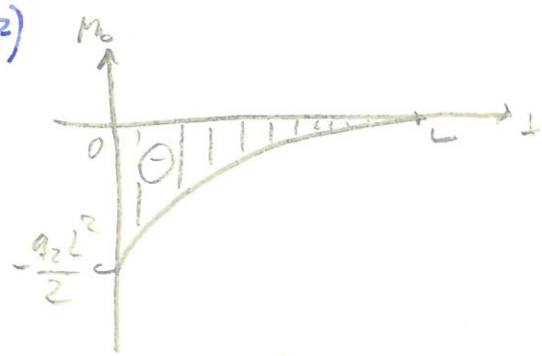
$M_b(x) = -F_{E2} \cdot \frac{1}{2}(L - x)$

$= q\,(x - L) \cdot \frac{1}{2}(L - x)$

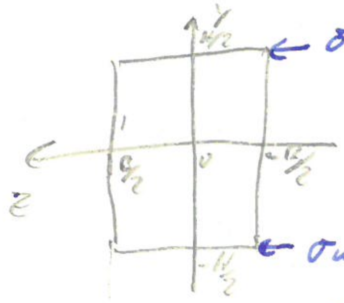
$= -\frac{q}{2}(L - x)^2 = -\frac{q}{2}(L^2 - 2Lx + x^2)$

$= -\frac{q}{2} x^2 + q_z L x - \frac{q}{2} L^2$





Flächennutzungsgrad



$$\leftarrow \sigma_{max} = \frac{M_b(x)}{W_b(H/2)}$$

Vorb. Test

$$\leftarrow \sigma_{max} = \frac{M_b(1)}{W_b(-H/2)}$$

$$\eta_A = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{\sigma(y,z)}{\sigma_{max}}\right)^2 dA$$

$$\sigma(y,z) = \frac{M_b(1)}{W_b(y)} = \frac{M_b(1)}{I_{B_z}} \cdot y$$

$$= \frac{12\, M_b(x)}{b \cdot H^3}\, y$$

$$\sigma_{max} = \frac{6\, M_b(1)}{b H^2}$$

$$I_b = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 1 dz \cdot \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2 dy$$

$$= B \cdot \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{B}{3}\left[\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right]$$

$$= \frac{2}{24} B H^3 = \underline{\underline{\frac{BH^3}{12}}}$$

$$W_b(y) = \frac{I_b}{y}$$

$$\eta_A = \frac{1}{BH} \int_{-\frac{B}{2}}^{B/2} 1\, dz \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{\frac{12 M_b(1)}{bH^3} y}{\frac{6 M_b(1)}{bH^2}}\right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{H/2} \frac{4}{H^2} y^2 dy$$

$$= \frac{4}{H^3} \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{4}{3 H^3} \cdot \left[\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right]$$

$$= \frac{8}{24} \frac{H^3}{H^3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Längennutzungsgrad

$$\eta_{A,Z} = \frac{1}{L} \int_L \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma_{max}}\right)^2 dx$$

$$\sigma(x) = \frac{M_b(x)}{W_b(x)} = \frac{-\frac{q}{2}\left(L^2 - 2Lx + x^2\right)}{\frac{bH^3}{6}}$$

$$\sigma_{max} = \sigma(0) = \frac{-\frac{q L^2}{2}}{\frac{bH^3}{6}}$$

$$\eta_{A,Z} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\frac{1}{bH^3}}{\frac{1}{bH^3}} \cdot \frac{-\frac{q}{2}\left(x^2 - 2Lx + L^2\right)}{-\frac{q}{2} L^2}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{L^5} \int_0^L (x-L)^4 dx$$

$$= \frac{1}{L^5} \left[\frac{1}{5}(x-L)^5\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{L^5}\left[0 - \left(-\frac{L^5}{5}\right)\right] = \frac{1}{5}$$

Volumennutzungsgrad:

$$\eta_A = \eta_{A,A} \cdot \eta_{A,Z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{15}}}$$

b) gleiche Randfaserspannung

$\hookrightarrow \quad \sigma(x) \overset{!}{=} \sigma_{max}$

$$\sigma(x) = \frac{-\frac{q}{2}(x^2-2Lx+L^2)\cdot 6}{B\,H(x)^2} \overset{!}{=} \frac{-\frac{q}{2}\cdot 6\cdot L^2}{B\,H_0^2}$$

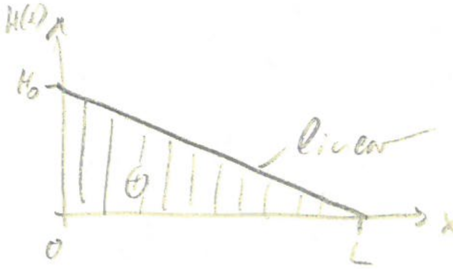
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{H(x)^2}(x^2-2Lx+L^2) = L^2\cdot\frac{1}{H_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(x)^2 = \frac{H_0^2}{L^2}(x^2-2Lx+L^2) = \frac{H_0^2}{L^2}\cdot(x-L)^2$$

$$H(x) = \pm\sqrt{\frac{H_0^2}{L^2}(x-L)^2}$$

$$\overset{!}{=} -\left(\frac{H_0}{L}x - H_0\right)$$

$$= H_0 - \frac{H_0}{L}x$$



c) $\eta_{Az} \overset{!}{=} 1$, $\eta_{AA} = \frac{1}{3}$ $\Big\}$ $\eta_A = \frac{1}{3}$

Kontrolle:

$$\eta_{A,z} = \frac{1}{L}\int_0^L \left[\frac{-\frac{q}{2}(x-L)^2\cdot 6\cdot\frac{1}{B\cdot(H_0-\frac{H_0}{L}x)^2}}{-\frac{q}{2}L^2\cdot\frac{1}{BH_0^2}\cdot 6}\right]^2 dx$$

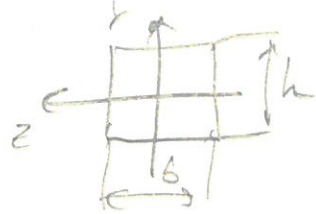
$$= \frac{1}{L}\int_0^L\left[\frac{(x-L)^2\,H_0^2}{\frac{H_0^2}{L^2}(x-L)^2L^2}\right]^2 dx = \frac{L}{L} = \underline{\underline{1}}$$

Beko
Liebich

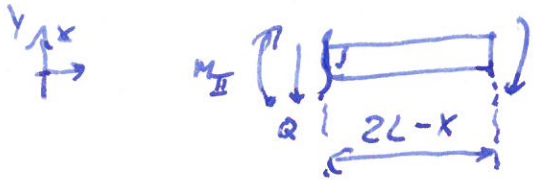
Wiederholung Hausaufgabe

23.07.16
Vorb. Test

a) Mechanik:



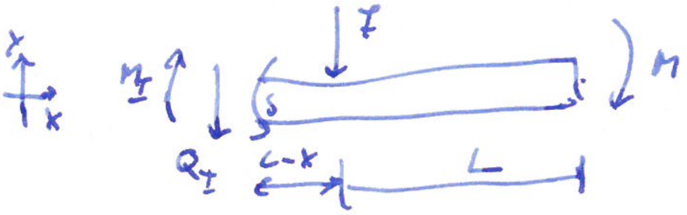
Bereich II $L \le x \le 2L$



$\to M_{II} = -M$

$Q_{II} = 0$

Bereich I $0 \le x \le L$



$Q_I = -F$

$M_I = -M - F(L-x)$

$= Fx - FL - M$

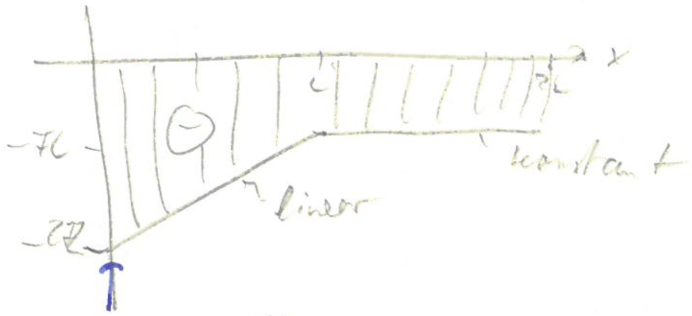
Flächenwirkungsgrad: $\boxed{M = F \cdot L}$

B1: $\eta_{A,A,I} = \frac{1}{3}$

B2: $\eta_{A,A,II} = \frac{1}{3}$

da rechteckiger Querschnitt → bekannt aus Ü

Längenwirkungsgrad: $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$ $\sigma_{max} = \sigma(0) = -2FL$



$\sigma_{max} = \sigma(0)$

Bereich 1:

$$n_{A,Z,I} = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{7x - 27L}{-27L} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4L^2} \int_0^L (x - 2L)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{4L^2} \left[\frac{1}{3} (x - 2L)^3 \right]_0^L$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{L^3} \cdot \left[-L^3 + 8L^3 \right] = \underline{\underline{\frac{7}{12}}}$$

Bereich 2:

$$n_{A,Z,II} = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\cancel{x - 7L}\, 1}{\cancel{-}2 \cancel{7L}} \right)^2 dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Volumenanteile:

$$\frac{V_1}{V_{ges}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{V_2}{V_{ges}} = \frac{1}{2}$$

Zusammen:

	1	2
$n_{A,A,i}$	$1/3$	$1/3$
$n_{A,Z,i}$	$7/12$	$1/4$
$\frac{V_i}{V_{ges}}$	$1/2$	$1/2$
$\frac{V_i}{V_{ges}} \cdot n_{A,A,i} \cdot n_{A,Z,i}$	$7/72$	$1/24$

$$n_A = \frac{7}{72} + \frac{1}{24} = \frac{10}{72} = \underline{\underline{\frac{5}{36}}}$$

UeKo Liebich

23.01.[illegible]
Vorbereitung Test

b) **Bereich 1:**

$\sigma(x) \overset{!}{=} \sigma_{max}$

$$\frac{\cancel{6}\cdot(\cancel{F}x - 2\cancel{F}L)}{\cancel{B}\,H(x)^2} = \frac{-\cancel{6}\,2\cancel{F}L}{\cancel{B}\,H_0^2}$$

$$(x-2L)\cdot H_0^2 = -2L\,H(x)^2$$

$$H(x)^2 = -\frac{H_0^2}{2L}(x-2L) = -\frac{H_0^2}{2L}x + 1 = 1 - \frac{H_0^2}{2L}x$$

$$H(x) = \sqrt{H_0^2 - \frac{H_0^2}{2L}x}$$

$$= H_0\sqrt{1-\frac{x}{2L}}$$

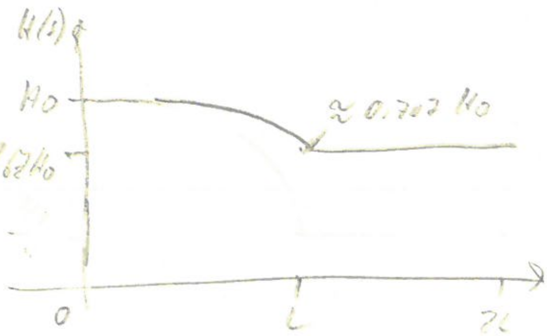
Bereich 2:

$\sigma(x) \overset{!}{=} \sigma_{max}$

$$\frac{-\cancel{F}\cancel{L}\cdot\cancel{6}}{\cancel{B}\,H(x)^2} = \frac{-2\cancel{F}\cancel{L}\cdot\cancel{6}}{\cancel{B}\,H_0^2}$$

$$H(x)^2 = \frac{1}{2}H_0^2$$

$$H(x) = \frac{1}{\pm 2}\sqrt{2}\,H_0$$



c)

	①	②
$n_{H,A}$	$1/3$	$1/2$
$n_{A,Z}$	1	1
$\frac{V_i}{V_{ges}}$	$1/2$	$1/2$
$\frac{V_i}{V_{ges}}\cdot n_{AA}\cdot n_{AZ}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

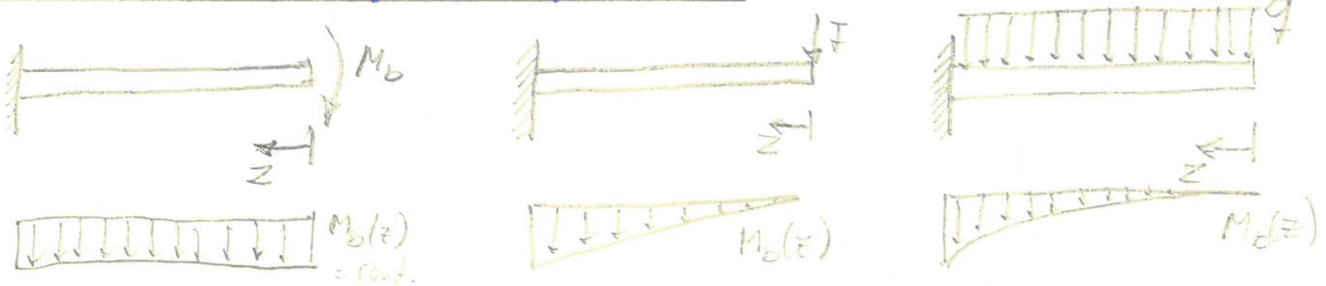
$$\underline{\underline{n_A = \frac{1}{3}}}$$

⑥

bekannte Flächennutzungsgrade:

Querschnitt	Zug/Druck	Biegung	Torsion
Rechteck voll	1	1/3	–
Kreis voll	1	1/4	1/2
Doppel-T-Träger	1	2/3	–
Kreis hohl	1	1/2	1

bekannte Längennutzungsgrade



$\eta_{A,z} = 1$ $\eta_{A,z} = \frac{1}{3}$ $\eta_{A,z} = \frac{1}{5}$

Beko
Liebich

Castigliano

20.0?.??
Vorbereitung Test

Formänderungsenergie:

↳ durch Verformung von einem Körper aufgenommene potenzielle Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{ges}} \frac{\sigma^2}{2E} \, dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{ges}} \frac{\tau^2}{2G} \, dV \qquad \left[\; \right] = Nm = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

E: Elastizitätsmodul

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \; \curvearrowright \; E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \left[\frac{N}{mm^2}\right]$$

Ableitung der Spannung nach der Dehnung

G: Schubmodul $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$

Zusammenhang zwischen linear-elastischer Verformung eines Bauteils infolge aufgebrachter Schubkraft

$$\tau = G \cdot \tan\gamma \; \curvearrowright \; G = \frac{\tau}{\tan\gamma}$$

für kleine Winkel γ: $\tan\gamma \hat{=} \gamma$

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)} E$$

ν: Querkontraktionszahl

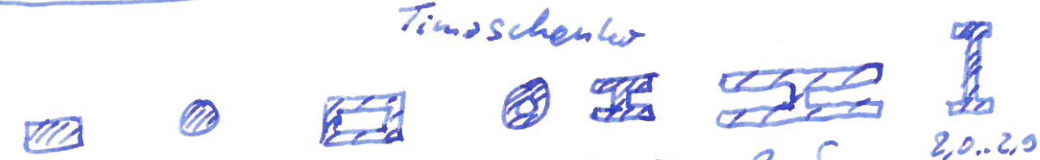
die Querkontraktionszahl ν (oder auch Poissonzahl) ist definiert als lineares negatives Verhältnis aus relativer Änderung der Abmessung quer zur einachsigen Spannungsrichtung ε_{yy} zur relativen Längenänderung ε_{xx} bei Einwirkung eines eindimensionalen mechanischen Spannungszustands σ_{xx}:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \quad \curvearrowright \text{ i.d.R.} > 0$$

$$= -\frac{\Delta d / d}{\Delta l / l} \qquad [-]$$

allgemeine Formulierung von W:

$$W = \underbrace{\int_0^l \underbrace{\frac{M_I^2}{2EI_I} + \frac{M_{II}^2}{2EI_{II}} + \frac{M_T^2}{2GI_p} + \frac{N^2}{2EA}}_{\text{Bernoulli}} + \frac{1}{2GA} \cdot \left(\chi_I Q_I^2 + \chi_{II} Q_{II}^2 \right) ds}_{\text{Timoschenko}}$$



χ_I	1,2	1,1	2,2	2	2,0..2,9	3..5	2,0..2,9
χ_{II}	1,2	1,1	2,2	2	2,0..2,9	3..5	2,0..2,9

Sätze von Castigliano:

1. Satz: $\frac{\partial W}{\partial F} = u_F$, $\frac{\partial W}{\partial M} = \alpha$ Verschiebung, Verdrehung

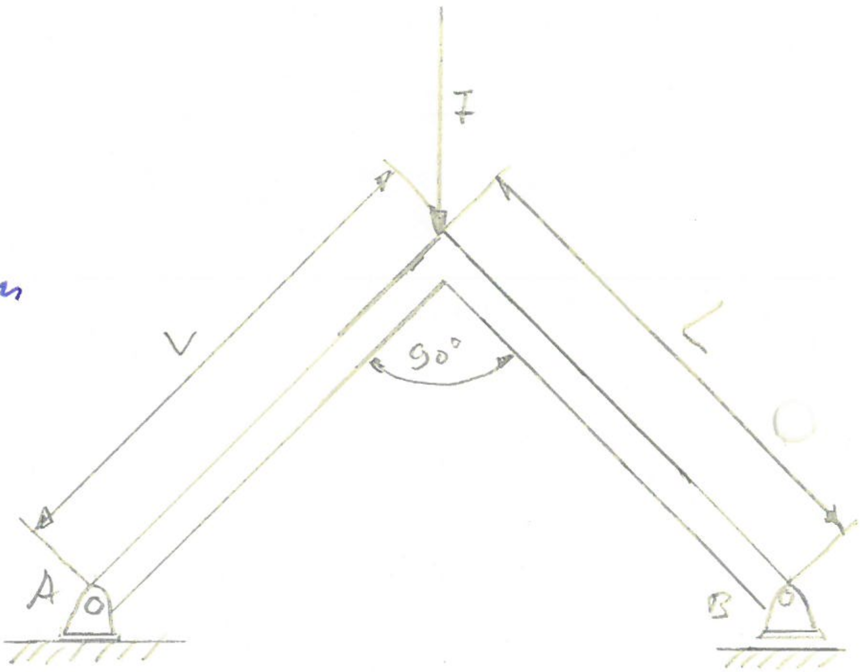
2. Satz (Liebich): $\frac{\partial W}{\partial u} = F$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = M$ Kraft, Moment

Satz von Meabrea (Sonderform von Castigliano):

wenn α, bzw. $u_F = 0$ und als solches bekannt

$$\frac{\partial W}{\partial F_0} = u_{F_0} \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial M_0} = \alpha_0 \overset{!}{=} 0$$

1. Analytische Lösung



Der in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Rahmen ist bei A durch ein Gelenk und bei B durch ein Rollenlager abgestützt und wird an der biegesteifen Ecke C durch eine Kraft F belastet.

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen und Schnittverläufe

b) Berechnen Sie die Verschiebung des Kraftangriffspunkts unter Vernachlässigung der Anteile aus Querkraft und Normalkraft

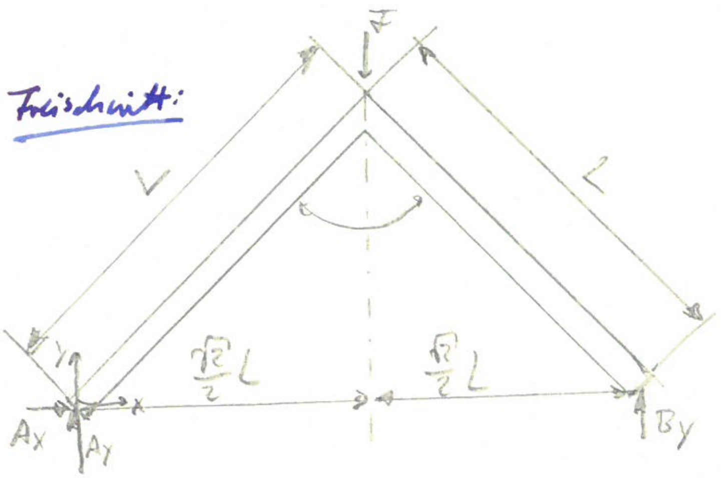
c) Berechnen Sie die Verschiebung des Rollenlagers B.

d) Berechnen Sie die Verschiebung des Kraftangriffspunkts unter Berücksichtigung der Quer- und Normalkraftanteile

Beko
Zielicke

Vorbereitung
Test

a) Freischnitt:



Auflagerreaktionen

$\underline{A_x = 0}$

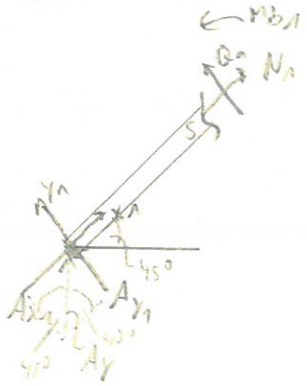
$F = A_y + B_y$

$$\sum M_{z,i}^{(A)} \overset{!}{=} 0 = -F\frac{\sqrt{2}}{2}L + \sqrt{2}L B_y$$

$$\underline{\frac{F}{2} = B_y} \Rightarrow \underline{A_y = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}}$$

Schnittlasten:

Bereich 1: $0 \le x_1 \le L$



$$A_{y1} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_y = A_{x1}$$

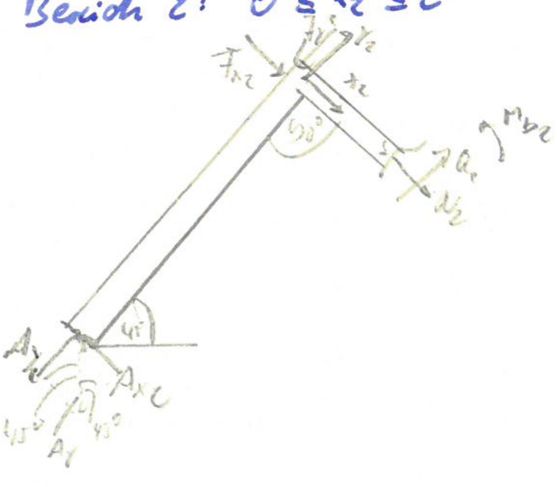
$$N_1 = -A_{x1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{F}{2} = -\frac{F}{4}\sqrt{2}$$

$$Q_1 = -A_{y1} = -\frac{F}{4}\sqrt{2}$$

$$M_{b1} = A_{y1}x_1 = \frac{F}{4}\sqrt{2}\,x_1$$

$$M_{b1}(0) = 0 \qquad M_{b1}(L) = \frac{\sqrt{2}}{4}FL$$

Bereich 2: $0 \le x_2 \le L$



$$F_{x2} = \frac{\sqrt{2}}{2}F = F_{y2}$$

$$A_{y2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_y = A_{x2} = \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

$$N_2 = A_{x2} - F_{x2} = \frac{\sqrt{2}}{4}F - \frac{\sqrt{2}}{2}F = -\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

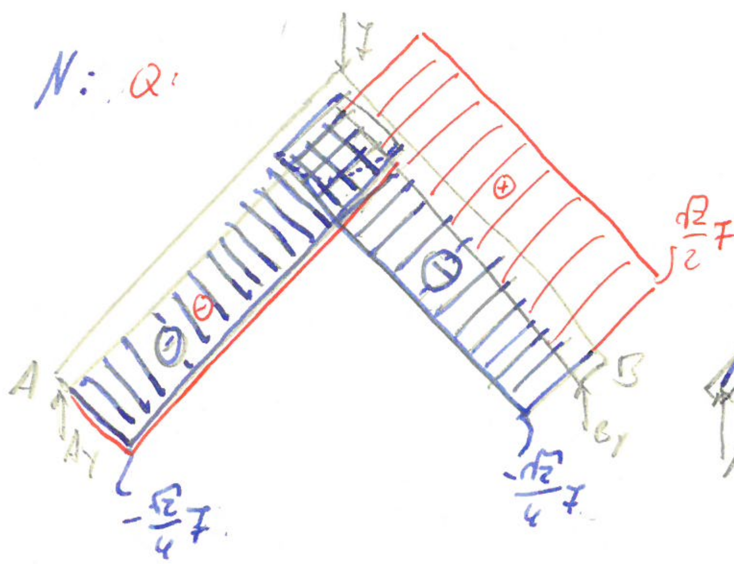
$$Q_2 = -A_{y2} + F_{y2} = \frac{\sqrt{2}}{4}F + \frac{\sqrt{2}}{2}F = +\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

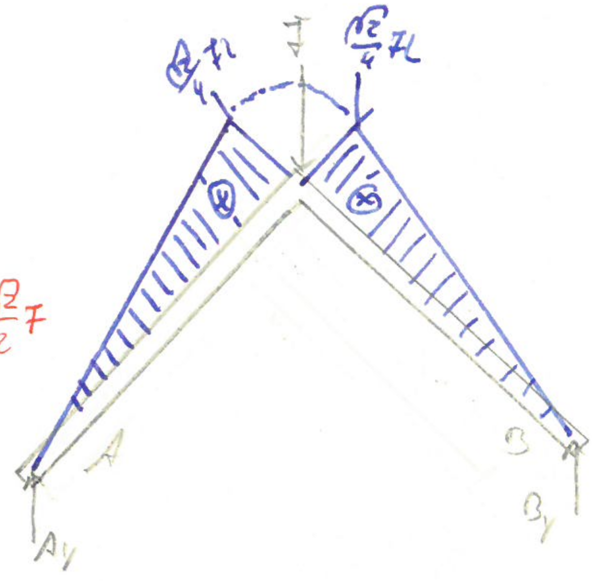
$$M_{b2}(x_2) = -F_{y2}x_2 + A_{y2}x_2 + A_{x2}\cdot L$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}Fx_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}Fx_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}FL$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}F\left(L - x_2\right)$$

$$M_{b2}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}FL \qquad M_{b2}(L) = 0$$

Schnittlastenverläufe:

N: Q:





b)
$$W = \int_0^L \frac{M_{b1}(x_1)^2}{2EI_{Bz}}\,dx_1 + \int_0^L \frac{M_{b2}(x_2)}{2EI_{Bz}}\,dx_2$$

N, Q wird vernachlässigt

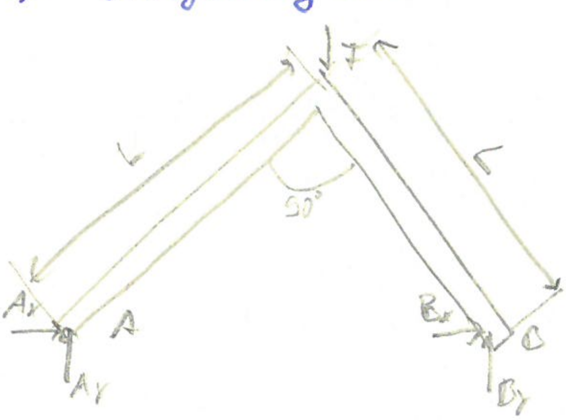
$$= \frac{1}{2EI_{Bz}}\left[\int_0^L \frac{F^2}{8}x_1^2\,dx_1 + \int \frac{F^2}{8}(L-x_2)^2\,dx_2\right]$$

$$= \frac{F^2}{16EI_{Bz}}\left[\left[\frac{1}{3}x_1^3\right]_0^L + \left[-\frac{1}{3}(L-x_2)^3\right]_0^L\right]$$

$$= \frac{F^2}{48EI_{Bz}}\left(L^3 - \left[0 - L^3\right]\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{F^2L^3}{24EI_{Bz}}}} \qquad u_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \underline{\underline{\frac{FL^3}{48EI_{Bz}}}}$$

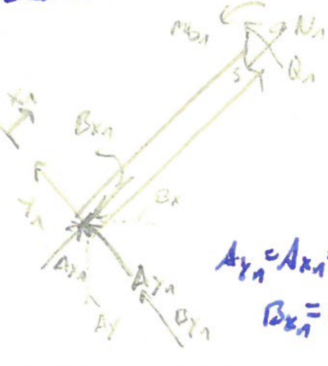
c) Einführung einer virtuellen Kraft B_x



neue Schnittlastenverläufe

$A_x = -B_x$

Bereich 1 : $0 \le x_1 \le L$



$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}B_x - \frac{\sqrt{2}}{4}F$

$Q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}F - \frac{\sqrt{2}}{2}B_x$

$A_{y1} = A_{x1} = \frac{\sqrt{2}}{4}F$

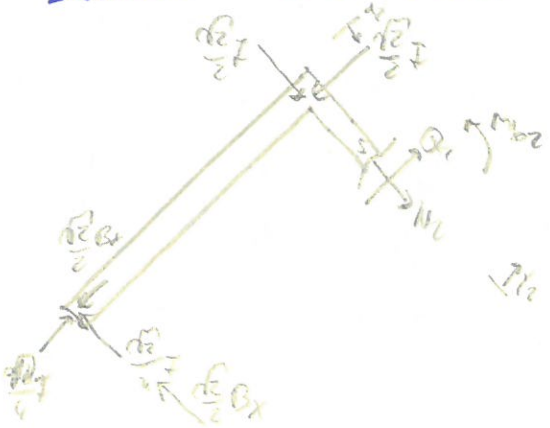
$B_{x1} = B_{y1} = \frac{\sqrt{2}}{2}B_x$

DeKo Liebich

Vorbereitung Test

$$M_{b1} = \frac{\sqrt{2}}{2} B_x x_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} F x_1$$

Bereich 2: $0 \leq x_2 \leq L$



$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} B_x - \frac{\sqrt{2}}{4} F$$

$$Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} F + \frac{\sqrt{2}}{2} B_x$$

$$M_{b2}(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} F L + \frac{\sqrt{2}}{2} B_x L - \frac{\sqrt{2}}{2} B_x \cdot x_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} F x_2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(F + 2B_x\right) L - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(F + 2B_x\right) x_2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(F + 2B_x\right)\left(L - x_2\right)$$

$$W = \int_0^L \frac{M_{b1}(x_1)^2}{2EI_{Bz}} dx_1 + \int_0^L \frac{M_{b2}(x_2)^2}{2EI_{Bz}} dx_2$$

$$= \frac{1}{2EI_{Bz}} \left(\int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \left(2B_x + F\right)^2 x_1^2 \, dx_1 + \int_0^L \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \left(2B_x + F^2\right)\left(L - x_2\right)^2 dx_2 \right)$$

$$= \frac{(2B_x + F)^2}{2 \cdot 8 EI_{Bz}} \left(\left[\frac{1}{3} x_1^3\right]_0^L + \left[-\frac{1}{3}\left(L - x_2\right)^3\right]_0^L \right)$$

$$= \frac{(2B_x + F)^2}{2 \cdot 24 EI_{Bz}} \cdot 2 \cdot L^3 = \frac{L^3}{24 EI_{Bz}} \cdot \left(2B_x + F\right)^2$$

$$\lim_{B_x \to 0} \frac{\partial W}{\partial B_x} = \lim_{B_x \to 0} \frac{2B_x L^3 + F L^3}{6 EI_{Bz}} = \underline{\underline{\frac{F L^3}{6 EI_{Bz}} = u_B}}$$

d) $$W = \int_0 \frac{M_{b_1}(x_1)^2}{2EI_{Bz}}\,dx_1 + \int_0 \frac{M_{b_2}(x_2)}{2EI_{Bz}}\,dx_2$$

$$+ \int_0^L \frac{N_1^2}{2EA} + \frac{\varkappa Q_1^2}{2GA}\,dx_1 + \int_0^L \frac{N_2^2}{2EA} + \frac{\varkappa Q_2^2}{2GA}\,dx_2$$

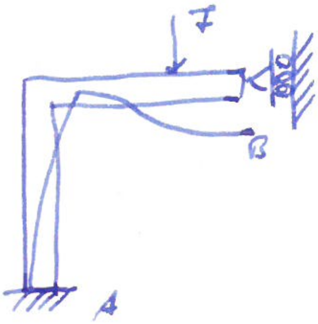
$$= \frac{F^2L^3}{24EI_{Bz}} + \frac{1}{2EA}\int_0^{2L} \frac{F^2}{8}\,dx + \frac{\varkappa}{2GA}\left(\int_0^L \frac{F^2}{8}dx_1 + \int_0^L \frac{F^2}{8}dx_2\right)$$

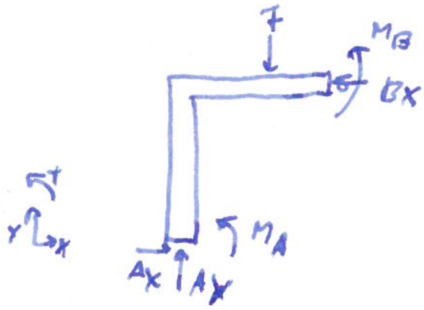
$$= \frac{F^2L^3}{24EI_{Bz}} + \frac{F^2L}{8EA} + \frac{\varkappa F^2L}{8GA}$$

$$u_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{FL^3}{12EI_{Bz}} + \frac{FL}{4EA} + \frac{\varkappa FL}{4GA}$$

Beko
Liebich

23.04.18
Vorlesung
Text





Satz v. Menabrea

$$\frac{\partial W}{\partial M_B} \overset{!}{=} \alpha_B = 0$$

$$u_F = \frac{\partial W}{\partial F}$$

$$\partial W = \frac{1}{E} \int_L \underbrace{\left[\frac{M_I^2}{2EI_I} + \frac{M_{II}^2}{2EI_{II}} + \frac{M_T^2}{2GI_P} + \frac{N^2}{2EA} \right.}_{\text{Bernoulli}} \left. + \frac{1}{2GA} \left[k_1 Q_1^2 + k_2 Q_2^2 \right] \right] ds$$

Timoshenko

Bernoulli: schubstarr

Timoshenko: schubweich

Realität: