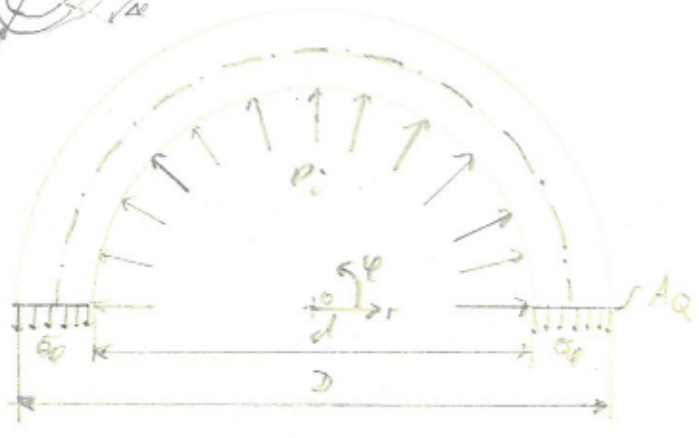


BEKO  
Liebich Stark gekrümmte Balken

(D.UT. 10  
Vorb. und  
Prüfung)

allg. Kesselformel:  $2\sigma_{\varphi} t \Delta l - p 2r \Delta l = 0$   
 $\Rightarrow \sigma_{\varphi} = p \frac{r}{t}$



Kesselformel:

$\sigma_{\varphi} = p_i \cdot \frac{d}{D-d}$  bzw.  $\sigma_{\varphi} = p_i \cdot \frac{\delta}{1-\delta}$   
 $d \approx D$  bzw.  $\frac{d}{D} \approx 1$  mit  $\delta = \frac{d}{D}$   
 (dünnwandig)  $\Rightarrow \sigma_{\varphi}(\frac{d}{2}) \approx \sigma_{\varphi}(\frac{D}{2})$

Schleifen-DGL:

$\sigma_{\varphi}(r) = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) p_i$   
 $a = \frac{D}{2}$      $b = \frac{d}{2}$

Castigliano - normaler Balken / stark gekrümmter Balken:

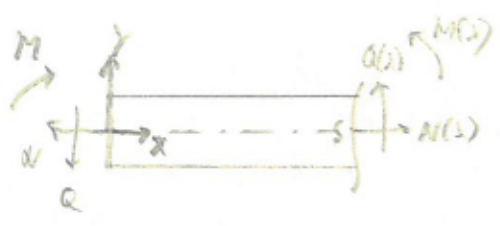
normaler Balken:

Normalkraft:  $F = N$

Flächenträgheitsmoment:  $I = \int_A \eta^2 dA$

Normalspannung:  $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{I} \eta$

Formänderungsenergie:  $W = \int_L \frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA} ds$



stark gekrümmter Balken:

$F^* = N(\varphi) = \frac{M(\varphi)}{R} \cdot \frac{1}{2} 2R$   
 $I = \int_A \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{R}} dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{R}} \cdot r d\eta d\varphi$

$\sigma = \frac{F^*}{A} + \frac{M}{I} \cdot \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{R}}$

$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \frac{M^2}{2EI} + \frac{F^{*2}}{2EA} \right) R d\varphi$   
 $R = \frac{D+d}{2} \cdot \frac{1}{2}$



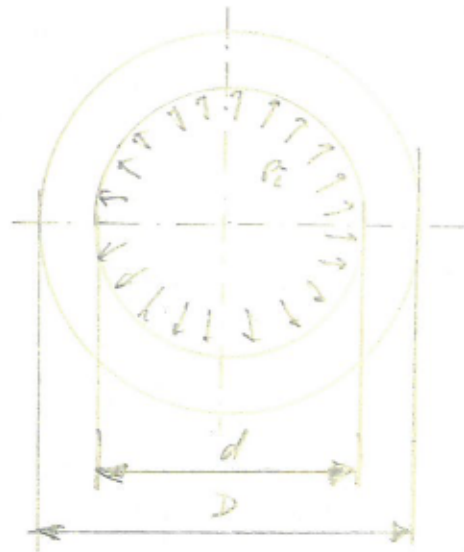
# Analytische Übung: stark gekrümmter Balken

Bestimmung der Umfangsspannungen am Innenrand formelmäßig

a) nach Kesselformel

$$\sigma_{\theta} = p_i \cdot \frac{d}{D-d} = p_i \cdot \frac{\delta}{1-\delta}$$

$\delta = \frac{d}{D}$	0,98	0,9	0,8	0,5	0,25
$\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$	49	9	4,0	1	$\frac{1}{3}$



b) mit Scheiben-DGL

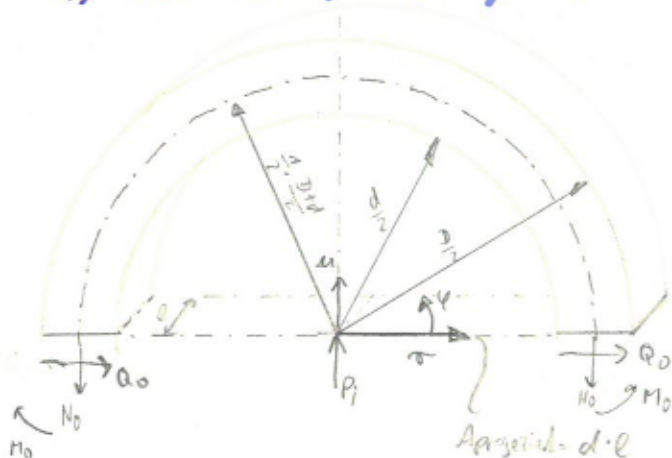
$$\sigma_{\varphi}(r) = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) p_i \quad a = \frac{D}{2}, \quad b = \frac{d}{2} \quad \delta = \frac{d}{D}$$

$$\sigma_{\varphi}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{d^2}{D^2 - d^2} \cdot \left( 1 + \frac{D^2}{d^2} \right) p_i = \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} \right) p_i = \frac{1 + \delta^2}{1 - \delta^2} p_i$$

$\delta = \frac{d}{D}$	0,98	0,9	0,8	0,5	0,25
$\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$	49,5	9,2	4,55	1,67	1,13

*hier hat die Kesselformel deutliche Abweichungen*

b) mit Castigliano für stark gekrümmte Balken



$$\sum F_{i,r} \stackrel{!}{=} 0 = Q_0 + Q_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{Q_0 = 0}$$

$$\sum F_{i,u} \stackrel{!}{=} 0 = -2N_0 + p_i \cdot d \cdot l$$

$$\Rightarrow \boxed{N_0 = p_i \cdot \frac{d \cdot l}{2}} \quad = \text{Aprojiziert}$$

Beko  
Lieblich

21.01.10  
Vorl. mdt.  
Prüfung

Formänderungsenergie:

$$W = \int_0^{2\pi} \left( \frac{M_0^2}{2Ez} + \frac{F^2}{2EA} \right) R d\varphi \quad \text{mit } R = \frac{D+d}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{R}{2E} \cdot 2 \int_0^{\pi} \left( \frac{M_0^2}{z} + \frac{(N_0 + \frac{M_0}{R})^2}{A} \right) d\varphi$$

↑  
Symmetrie

$$= \frac{R\pi}{2E} \cdot \left( \frac{M_0^2}{z} + \frac{(N_0 + \frac{M_0}{R})^2}{A} \right) = \frac{R\pi}{E} \cdot \left( \frac{1}{z} M_0^2 + \frac{1}{AR^2} M_0^2 + \frac{z}{AR} N_0 M_0 + \frac{1}{A} N_0^2 \right)$$

Anwendung 2. Satz von Castigliano bzw. Satz von Mebrea

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = \alpha_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \leftarrow \text{da rotationsymmetrische Belastung}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{R\pi}{E} \cdot \left( \frac{2M_0}{z} + \frac{2M_0}{AR^2} + \frac{2N_0}{AR} \right) = 0$$

$$0 = M_0 \left( \frac{2R\pi}{Ez} + \frac{2\pi}{EAR} \right) + \frac{2\pi}{EA} N_0$$

$$M_0 = - \frac{2\pi N_0}{EA} \cdot \left( \frac{2R\pi}{Ez} + \frac{2\pi}{EAR} \right)^{-1}$$

$$= - \frac{N_0}{EA} \cdot \left( \frac{AR^2}{EzAR} + \frac{z}{EzAR} \right)^{-1}$$

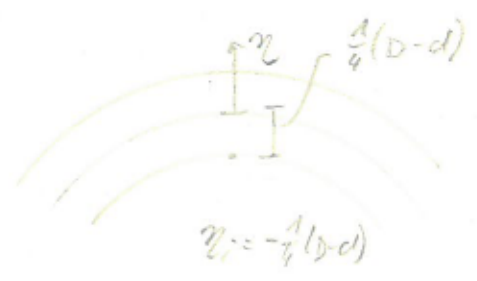
$$= - \frac{N_0}{EA} \cdot \frac{EA \cdot Rz}{A \cdot R^2 + z} = - \frac{N_0 R z}{AR^2 + z}$$

Bestimmung der Umfangsspannung

$$\sigma_\varphi(\eta) = \frac{F^*}{A} + \frac{M}{z} \cdot \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{R}}$$

$$\sigma_\varphi(r = \frac{d}{2}) = \sigma_\varphi(\eta_i) = \sigma_\varphi(-\frac{1}{4}(D-d))$$

$$= \frac{1}{A} \left( N_0 + \frac{M_0}{R} \right) + \frac{M_0}{E} \cdot \frac{\frac{1}{4}(D-d)}{1 + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{4}(D-d)} \quad \leftarrow R = \frac{D+d}{4}$$



$$= \frac{1}{A} \cdot \left( N_0 + \frac{4M_0}{D+d} \right) + \frac{M_0}{E} \cdot \frac{\frac{1}{4}(D-d)}{1 + \frac{\frac{1}{4}(D-d)}{\frac{1}{4}(D+d)}}$$

$$= \frac{1}{A} \left( N_0 + \frac{4M_0}{D+d} \right) + \frac{M_0}{E} \cdot \frac{\frac{1}{4}(D-d) \frac{1}{4}(D+d)}{\frac{1}{4}(D+d) + \frac{1}{4}(D-d)}$$

$$= \frac{1}{A} \left( N_0 + \frac{4M_0}{D+d} \right) + \frac{M_0}{4E} \cdot \frac{D^2 - d^2}{2D} \quad \leftarrow A = \frac{D-d}{2} \cdot l$$

$$N_0 = P_i \cdot \frac{dl}{2}$$

$$M_0 = -P_i \frac{dl}{2} \frac{\frac{D+d}{4} z}{\frac{D-d}{2} l \left( \frac{D+d}{4} \right)^2 + z}$$

$$\frac{N_0}{A} + \frac{4M_0}{A(D+d)} = \frac{P_i \frac{dl}{2}}{\frac{D-d}{2} l} + \frac{4 \cdot \left( -\frac{4P_i}{2} \frac{D^2 - d^2 + 4}{4l(D+d)} \right)}{(D+d) \cdot \frac{D-d}{2} l}$$

$$= \frac{N_0}{A} = \frac{4M_0}{(D+d)A}$$

$$= -\frac{4(D+d)P_i z}{(D-d)(D+d)^2 + \frac{4z}{2}}$$

$$= -\frac{4P_i}{\frac{D^2 - d^2}{2} + \frac{4}{l(D+d)}}$$

$$= \frac{P_i}{D-d} - \frac{16P_i}{(D^2 - d^2)^2 l + 2(D-d)}$$

$$= P_i \left( \frac{1}{D-d} - \frac{8}{\frac{(D^2 - d^2)^2 l}{4} + (D-d)} \right)$$

$$\frac{M_0}{4E} \cdot \frac{D^2 - d^2}{2D} = -\frac{4P_i}{4E \cdot \frac{D^2 - d^2}{2} + \frac{4E \cdot 4}{l(D+d)}} \cdot \frac{D^2 - d^2}{2D}$$

$$= -\frac{P_i}{(D^2 - d^2) + \frac{4E}{l(D+d)}} \cdot \frac{D^2 - d^2}{2D}$$

$$\sigma_q = P_i \left( \frac{1}{D-d} - \frac{8}{\frac{(D^2 - d^2)^2 l}{4} + (D-d)} - \frac{D^2 - d^2}{(D^2 - d^2)2D + \frac{8zD}{l(D+d)}} \right)$$

→ meine Versuche auf der nächsten Seite



$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \cdot \left( N_0 + \frac{4M_0}{D+d} \right) + \frac{M_0}{E} \cdot \frac{\frac{1}{4}(D-d)}{1 + \frac{D-d}{D+d}} \\ &= \frac{N_0}{A} - \frac{\frac{N_0 R^2}{AR^2+z}}{AR} + \frac{-\frac{N_0 R z}{AR^2+z}}{E} \cdot \frac{\eta_i}{1 + \frac{\eta_i}{R}} \\ &= \frac{N_0}{A} - \frac{N_0 z}{A(AR^2+z)} - \frac{N_0 R}{AR^2+z} \cdot \frac{\eta_i}{1 + \frac{\eta_i}{R}} \\ &= \frac{N_0 (AR^2+z)(R+\eta_i)}{A(AR^2+z)(R+\eta_i)} - \frac{N_0 z(R+\eta_i)}{A(AR^2+z)(R+\eta_i)} - \frac{N_0 R \eta_i R A}{A(AR^2+z)(R+\eta_i)} \\ &= N_0 \cdot \frac{(AR^2+z)(R+\eta_i) - z(R+\eta_i) - R^2 A \eta_i}{(A^2 R^2 + A z)(R+\eta_i)} \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{4}(D+d)$$

$$\eta_i = \frac{1}{4}(D-d)$$

$$= N_0 \cdot \left( \frac{\left( \frac{A}{16}(D+d)^2 + z \right) \left( \frac{D}{2} \right) - \frac{zD}{2} - \frac{A}{16}(D+d)^2 \frac{1}{4}(D-d)}{\left( \frac{A^2}{16}(D+d)^2 + Az \right) \frac{D}{2}} \right)$$

$$= N_0 \cdot \left( \frac{\frac{AD}{16 \cdot 2} (D+d)^2 - \frac{A}{16} (D+d)^2 \frac{1}{4}(D-d)}{\frac{A}{16} \cdot \left( \frac{AD}{2} (D+d)^2 + 8zD \right)} \right)$$

$$= N_0 \cdot (D+d)^2 \cdot \left( \frac{\frac{D}{2} - \frac{1-\frac{d}{D}}{2} \cdot \frac{D}{2}}{A \frac{D}{2} (D+d)^2 + 16 \frac{D}{2} z} \right) = N_0 \cdot (D+d)^2 \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d}{D} \right)}{A(D+d)^2 + 16z} \right)$$

$$= P_i \cdot \frac{d\ell}{2} \cdot (D+d)^2 \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{D}\right)}{\frac{D-d}{2} \ell \cdot (D+d)^2 + 16k\ell} \right)$$

$$= P_i \cdot d(D+d)^2 \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{D}\right)}{(D-d)(D+d)^2 + 32k} \right)$$

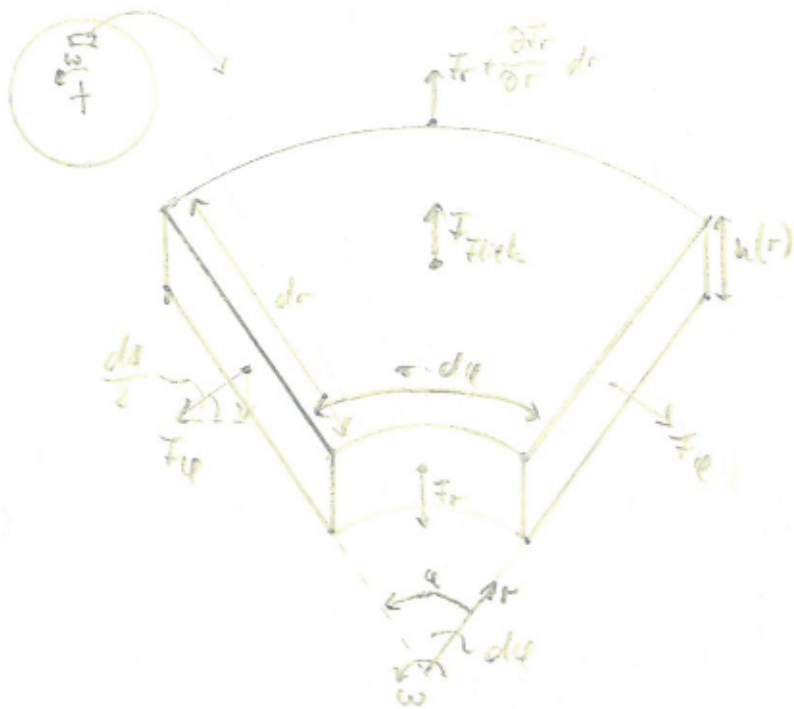

---

$$= P_i \cdot \frac{d}{D^2} \cdot \left(1 + \frac{d}{D}\right)^2 \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{D}\right)}{\frac{1}{D^3}\left(1 - \frac{d}{D}\right)\left(1 + \frac{d}{D}\right)^2 + 32k} \right)$$

$$\frac{d}{D} = \delta$$

$$\rightarrow = P_i \delta (1 + \delta)^2 \cdot \left( \frac{\frac{1}{D} - \frac{1}{2D} + \frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{D^3}(1 - \delta)(1 + \delta)(1 + \delta) + 32k} \right)$$

Herleitung einer analytischen Lösung



Kräfte gleichgewicht in radialer Richtung:

$$\sum F_{i,r} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= F_r + \frac{\partial F_r}{\partial r} dr + F_{Zlich} - F_r - 2 \cdot F_\phi \sin \frac{d\phi}{2}$$

mit:

$$F_r = \sigma_r(r) h(r) r d\phi$$

$$F_\phi = \sigma_\phi(r) h(r) dr$$

$$F_{Zlich} = dm \cdot r \cdot \omega^2 = \underbrace{\rho h(r) r d\phi dr}_{=dm} \cdot \omega^2$$

für kleine Winkel  $d\phi$  gilt:

$$\sin \frac{d\phi}{2} \approx \frac{d\phi}{2}$$



vereinfachungen:

$$\sigma_r(r) = \sigma_r, \sigma_\phi(r) = \sigma_\phi, h(r) = h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_r h r d\phi}{\partial r} dr + \rho h r^2 \omega^2 dr d\phi - \sigma_\phi h dr d\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r h r) dr d\phi + \rho h r^2 \omega^2 dr d\phi - \sigma_\phi h dr d\phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r h r) + \rho h r^2 \omega^2 - \sigma_\phi \cdot h = 0$$

Umgeschrieben:

$$\underline{\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r h r) - \sigma_\phi h = -\rho h r^2 \omega^2}$$

Ansatz für variable Höhe  $h(r)$ :

$$\underline{h(r) = C \cdot r^k} \quad C = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r \cdot C \cdot r^h \cdot r) - \sigma_\varphi \cdot C \cdot r^h = -\rho C r^h r^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r \cdot r^{h+1}) - \sigma_\varphi \cdot r^h = -\rho r^2 \omega^2 r^h$$

$$\Rightarrow \sigma_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r \cdot r^{h+1}) + \rho r^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \sigma_\varphi = (\sigma_r' r + \sigma_r (h+1)) + \rho \omega^2 r^2 \quad (1)$$

Produktregel:  
 $\frac{d}{dr} (a(r) \cdot b(r)) = a'(r) b(r) + a(r) b'(r)$

Verdrillungs-Verzerrungs-Relationen (VVR):

radiale Dehnung:  $\frac{\epsilon}{l_0}$

$$\epsilon_r = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{dr + \frac{\partial v_r}{\partial r} dr - dr}{dr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{(r + v_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{v_r}{r} \quad (2a)$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial (\epsilon_\varphi \cdot r)}{\partial r} \quad (2)$$



Hooke:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \Leftrightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

für Scheibe:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\varphi) \quad (3)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) \quad (4)$$

$$\left( \gamma_{\varphi r} = \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} \right)$$



Beke  
Lieblich Einsetzen von  $\sigma_\varphi$  aus (1) in  $E_r$  aus Stoffgesetz (3)  
und  $E_r$  aus Verschiebungs-Verspannungs-Relation (2)

28.08.2010  
Vorbereitung  
müll. Prüfung

(1) in (3):

$$E_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\varphi) = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_r - \nu \left[ \sigma_r' r + \sigma_r (n+1) + \rho \omega^2 r^2 \right] \right\} \quad (5)$$

(1) in (2) mit (4):

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial (\varepsilon_\varphi \cdot r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[ \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) r \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{E} \left[ \sigma_r' r + \sigma_r (n+1) + \rho \omega^2 r^2 - \nu \sigma_r \right] \cdot r \right\} \\ &= \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r' r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r r (n+1)) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho \omega^2 r^3) - \frac{\partial}{\partial r} (\nu r \sigma_r) \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r'' r^2 + 2\sigma_r' r + \sigma_r' (n+1) + \sigma_r (n+1) + 3\rho \omega^2 r^2 - \nu \sigma_r - \nu r \sigma_r' \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r'' r^2 + (n+3-\nu) r \sigma_r' + (n+1-\nu) \sigma_r + 3\rho \omega^2 r^2 \right] \quad (6) \end{aligned}$$

Gleichsetzen von (5) und (6)

$$\begin{aligned} \sigma_r - \nu \sigma_r' r - \nu \sigma_r (n+1) - \nu \rho \omega^2 r^2 &= \sigma_r'' r^2 + (n+3-\nu) r \sigma_r' + (n+1-\nu) \sigma_r + 3\rho \omega^2 r^2 \\ \Leftrightarrow \sigma_r'' r^2 + (n+3-\nu+\nu) r \sigma_r' + (n+1-\nu-1+\nu(n+1)) \sigma_r &= -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2 \\ \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_r'' r^2 + (n+3) r \cdot \sigma_r' + \nu(n+1) \cdot \sigma_r = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2}} \end{aligned}$$

inhomogene DGL 2. Ordnung für Scheiben veränderlicher  
Dicke

↳ kann man eigentlich nur numerisch lösen

Specialfall: konstante Dicke  $h(r) = C \cdot r^h = C \Rightarrow h=0$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_r'' \cdot r^2 + \sigma_r' \cdot 3r = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2}$$

inhomogene DGL 2. Ordnung für Scheiben konstanter Dicke

---

homogene DGL:  $\sigma_r'' \cdot r^2 + \sigma_r' \cdot 3r = 0$

Ausatz:  $\sigma_r = A \cdot r^\lambda$

$$\Rightarrow (A \cdot r^\lambda)'' \cdot r^2 + (A \cdot r^\lambda)' \cdot 3r = 0$$

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot A \cdot r^{\lambda-2} \cdot r^2 + \lambda A r^{\lambda-1} \cdot 3r = 0 \quad | : A ; : r^\lambda$$

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right\} \sigma_{rh} = r^{\lambda_1} A_1 + r^{\lambda_2} A_2 = A_1 + \frac{A_2}{r^2}$$

---

inhomogene DGL:  $\sigma_r'' \cdot r^2 + \sigma_r' \cdot 3r = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2$

Ausatz:  $\sigma_r = B r^2$

$$\Rightarrow (B r^2)'' \cdot r^2 + (B r^2)' \cdot 3r = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2$$

$$2B r^2 + 6B r^2 = -(3+\nu) \rho \omega^2 r^2$$

$$B = -\frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} \Rightarrow \sigma_{rp} = -\frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} r^2$$

---

$$\sigma_r = \sigma_{rh} + \sigma_{rp}$$

$$\underline{\sigma_r = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{(3+\nu) \rho \omega^2}{8} r^2} \quad (7)$$

aus (1):

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_r' \cdot r + \sigma_r (1+\nu) + \rho \omega^2 r^2$$

 $\alpha = 0:$ 

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_r' \cdot r + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2$$

(7) in (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \left( A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{(3+\nu)\rho\omega^2 r^2}{8} \right)' \cdot r + \left( A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{(3+\nu)\rho\omega^2 r^2}{8} \right) + \rho\omega^2 r^2 \\ &= -2\frac{A_2}{r^2} - \frac{2(3+\nu)\rho\omega^2 r^2}{8} + A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{(3+\nu)\rho\omega^2 r^2}{8} + \rho\omega^2 r^2 \\ &= A_1 - \frac{A_2}{r^2} + \left( -\frac{3(3+\nu)+1}{8} \right) \rho\omega^2 r^2 \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma_{\varphi} = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2} \quad (8)$$

aus (2a) und (4)

$$\frac{v_r}{r} = \varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \nu\sigma_r)$$

$$v_r = \frac{1}{E} [r\sigma_{\varphi} - \nu r\sigma_r]$$

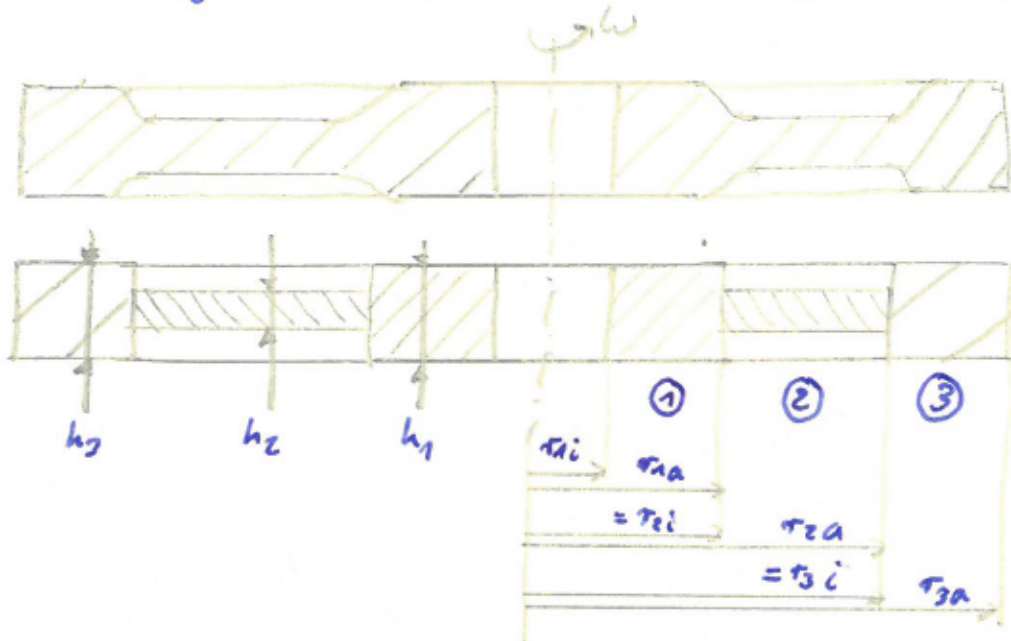
 $\Rightarrow$  mit (7) und (8)

$$v_r = \frac{1}{E} \left[ A_1 r - \frac{A_2}{r} - \frac{1+3\nu}{8} \rho\omega^2 r^3 - A_2 \nu - \frac{A_2 \nu}{r} + \frac{\nu(3+\nu)\rho\omega^2 r^3}{8} \right]$$

$$\underline{v_r = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)rA_1 - (1+\nu)\frac{A_2}{r} + \frac{\nu^2-1}{8} \rho\omega^2 r^3 \right]}$$

# Scheiben mit veränderlicher Höhe

- DGL analytisch nicht lösbar, numerische Log., <sup>evtl.</sup> viel Rechenzeit
- FEM liefert ein Ergebnis, welches allerdings numerisch aufgerollt ist (berechnete Verschiebungen müssen nochmal abgeleitet werden, um auf die Momente und damit auf die Spannungen zu kommen).
- Diskretisierung Scheibe als mehrere Scheiben mit konstanter Höhe



Konservativität der Modellierung:



$\Rightarrow$  Realität liegt dazwischen  
 $\Rightarrow$  evtl. ausprobiert

3 Scheiben  $\approx$  3 x DGL-Lösung mit konstanter Dicke  $\approx$  6 Unbekannte

Randbedingungen:  $v_{r(1)i} = \dots$       $\sigma_{r(1)i} = \dots$   
 $v_{r(3)a} = \dots$       $\sigma_{r(3)a} = \dots$

Übergangsbedingungen:  $\sigma_{\theta(1)a} \cdot h_1 \cdot 2\bar{u} + \tau_{1a} = \sigma_{\theta(2)i} \cdot h_2 \cdot 2\bar{u} + \tau_{2i}$

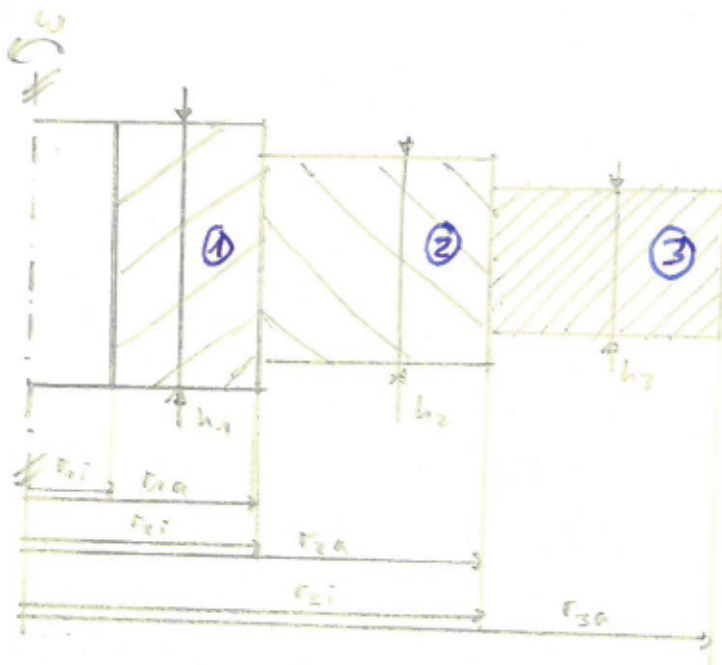
$v_{r(1)a} = v_{r(2)i}$

+  $\approx$  das gleiche für 2/3

$\Rightarrow$  Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Unbekannten

$\Rightarrow$  bei deutlich feiner Diskretisierung: sehr große Rechenzeit





Zustand am Außenrand einer Schicht als Funktion des Zustands am Innenrand:

$$\sigma_{r@l} a \cdot h_i = f(\sigma_{r@l} i \cdot h_i; v_{r@l} i; \omega^2)$$

$$v_{r@l} a = f(\sigma_{r@l} i \cdot h_i; v_{r@l} i; \omega^2)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{r@l} a \cdot h_i = u_{11} \cdot \sigma_{r@l} i \cdot h_i + u_{12} \cdot v_{r@l} i + u_{13} \cdot \omega^2$$

$$v_{r@l} a = u_{21} \cdot \sigma_{r@l} i \cdot h_i + u_{22} \cdot v_{r@l} i + u_{23} \cdot \omega^2$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{r@l} a \cdot h_i \\ v_{r@l} a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{r@l} i \cdot h_i \\ v_{r@l} i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{13} \omega^2 \\ u_{23} \omega^2 \end{Bmatrix}$$

→ Überführung in ein  $3 \times 3$ -System, damit alle Faktoren in einer quadratischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r@l} a \cdot h_i \\ v_{r@l} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \omega^2 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{r@l} i \\ v_{r@l} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{z@l} a = \underline{U} \cdot \underline{z@l} i$$

↙  
Zustand  
am Außenrand

↙  
Zustand  
am Innenrand

allgemein:

$$u_{11} = f(r_a, r_i, \nu) = \frac{r_a^2 + \nu r_a^2 + r_i^2 - \nu r_i^2}{2 r_a^2}$$

$$u_{12} = f(r_a, r_i, E, h) = \frac{1}{2} E h \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_i^2 \cdot r_a^2}$$

$$u_{13} = f(r_a, r_i, \nu, h, \rho, \omega) = \frac{-\rho \omega^2 h (-2 r_a^2 r_i^2 - 2 r_a^2 r_i^2 \nu) - r_i^4 + r_i^4 \nu + 3 r_a^4 + r_a^4 \nu}{8 r_a^2}$$

$$u_{21} = f(r_a, r_i, \nu, E, h) = \frac{-(-r_a^2 + r_a^2 \nu^2 + r_i^2 - r_i^2 \nu^2)}{2 E r_a h}$$

$$u_{22} = f(r_a, r_i, \nu) = \frac{-(-r_a^2 + r_a^2 \nu - r_i^2 - r_i^2 \nu)}{2 r_i r_a}$$

$$u_{23} = f(r_a, r_i, \nu, E, \rho, \omega) = \rho \omega^2 \frac{2 r_a^2 r_i^2 - 2 r_a^2 r_i^2 \nu^2 - r_i^4 + r_i^4 \nu^2 - r_a^4 + r_a^4 \nu}{8 E r_a}$$

Herleitung: mit Scheiben-DGL einmal Zustand für allgemeinen Fall außen und innen analytisch berechnen und die beiden Zustände in Beziehung setzen. Durch Umstellen können die 6 Faktoren ermittelt werden

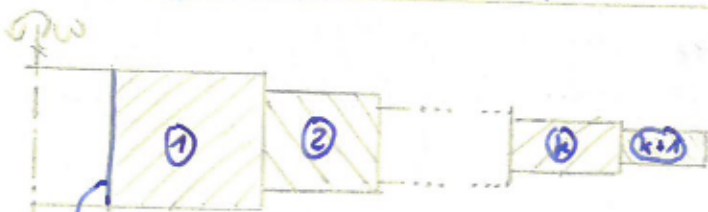
Berechnung für Scheibenelement ohne Loch in der Mitte:

in den Gleichungen für die Faktoren  $r_i = 0$  setzen bei  $u_{21}, u_{13}, u_{23}$

$$u_{11} = 1; u_{12} = u_{22} = 0 \quad (\text{Verschiebung im Zentrum} = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-(3+\nu)\rho h \omega^2 r_a^2}{8 E} \\ \frac{(1-\nu)r_a}{2 E h} & 0 & \frac{-(1-\nu^2)\rho \omega^2 r_a^3}{8 E} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ermittlung des Zustands an k-ter Stelle:



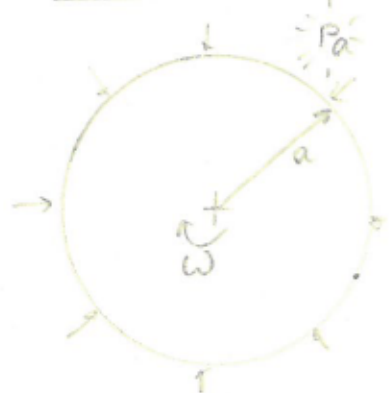
$$\underline{z}_{k|a} = \underline{\underline{\ddot{u}}}_k \cdot \underline{\underline{u}}_{k-1} \dots \underline{\underline{\ddot{u}}}_2 \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}_1 \cdot z_{1li}$$

RB am Innenrand bestimmen

$z_{1li}$  bestimmen (analytisch)

Vorteil: im Rechner nur Multiplikation von  $3 \times 3$  Matrizen

↳ extrem schnell



- 1. RB:  $v(r=0) = 0$
- 2. RB:  $\sigma_r(r=a) = -p_a$

1. drehende Vollscheibe mit Außendruck  $p_a$



- 1. RB:  $\sigma_r(r=a) = 0$
- 2. RB:  $\sigma_r(r=b) = -p_i$

2. drehende Kreisscheibe mit Innendruck  $p_i$



- 1. RB:  $\sigma_r(r=a) = 0$
- 2. RB:  $\sigma_r(r=b) = 0$

3. drehende Kreisscheibe ohne Innen und Außendruck

Formeln, die man wissen müsste zum Thema Scheiben

$$\sigma_r = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{(3+\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

$$v_r = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) A_1 r - (1+\nu) \frac{A_2}{r} + \frac{\nu^2 - 1}{8} \rho \omega^2 r^3 \right]$$

Lsg. aus DGL  
3. Ordnung für  
rot. Scheiben konst.  
Dicke

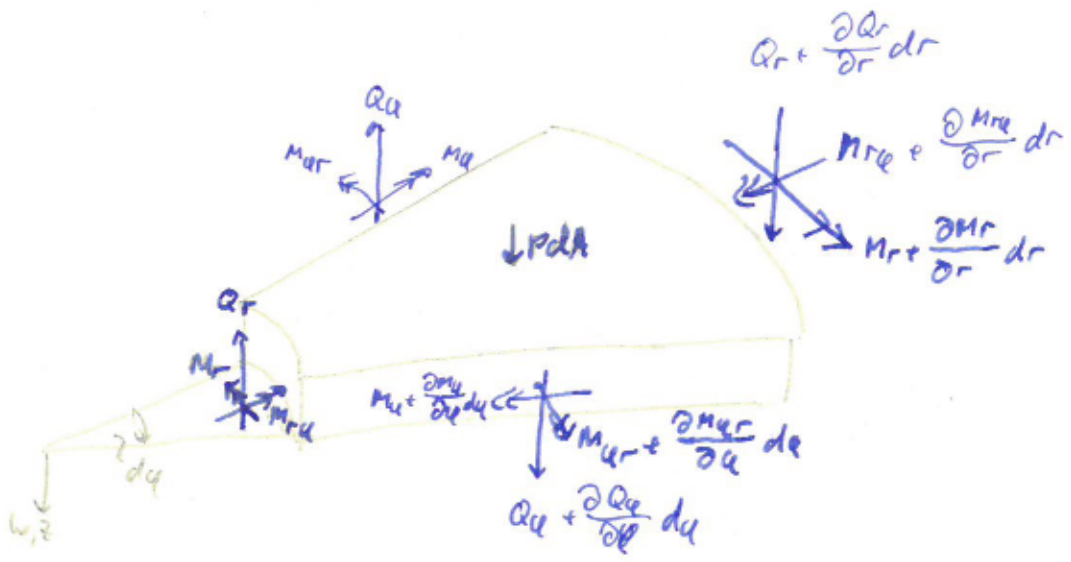
$$\sigma_r'' r^2 + 3\sigma_r' = -(3+\nu)\rho\omega^2 r$$

$$\frac{v_r}{r} = \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \Leftrightarrow \sigma_\theta = E \cdot \left( \frac{v_r}{r} + \nu \sigma_r \right)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)$$







• Kräfte- und Momentengleichgewicht bilden

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz \quad M_u = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_u z dz \quad M_{qr} = M_{qu} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} z dz$$

$$Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz \quad Q_u = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{uz} dz$$

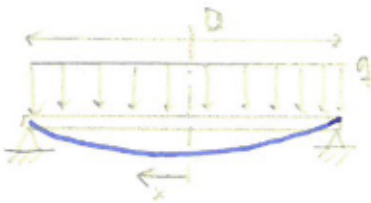
• Umstellen führt zu ein DGL 4. Ordnung → Platten-DGL  
man braucht immer 4 Randbedingungen, da durch vierfachen  
Integrieren 4 Konstanten entstehen

p Flächenbelastung  
B: Plattensteifigkeit  $B = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\left\{ \left[ \frac{w(r)}{r} \right]' \right\}' \frac{1}{r} = \frac{p}{B}$$

- w : Durchsenkung (Biegelinie)
- w' : Biegewinkel
- w'' = M (Moment)
- w''' = Q (Querkraft)
- w'''' = q (Streckenlast)

## Beispiele:

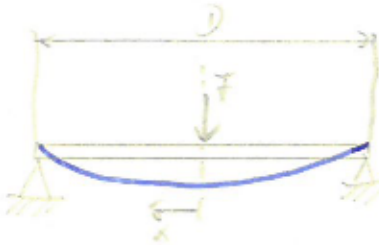


①:  $w'(x=0) = 0$

②:  $w(x=\frac{D}{2}) = 0$

③:  $\bar{M}_r(x=\frac{D}{2}) = \bar{M}_r(x=-\frac{D}{2}) = 0$

④:  $Q(x) = 0$  (bei einer Streckenlast hat man in einem infinitesimal kleinen Flächenelement keine Querkraft)

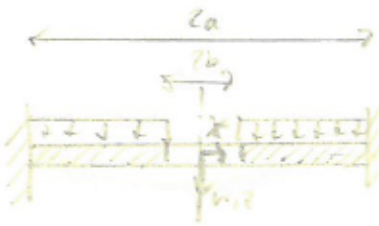


①:  $w'(x=0) = 0$

②:  $w(x=\frac{D}{2}) = 0$

③:  $\bar{M}_r(x=\frac{D}{2}) = \bar{M}_r(x=-\frac{D}{2}) = 0$

④:  $Q(x=\frac{D}{2}) = 0$



①:  $w(x=a) = 0$

②:  $w'(x=a) = 0$

③:  $\bar{M}_r(x=a) = 0$

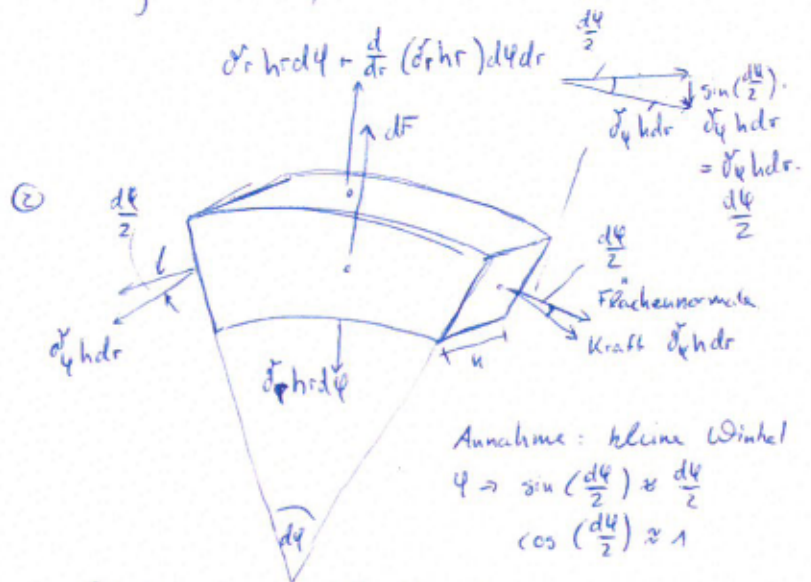
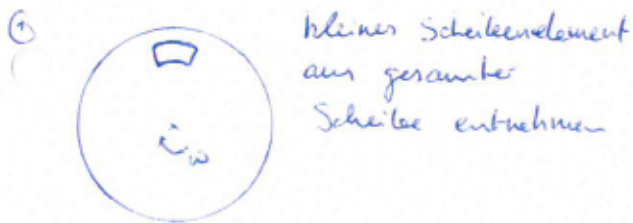
④:  $\bar{Q}_r(x=a) = 0$



$$\text{Übertragungsmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}(r_a, r_i, \nu) & u_{12}(r_a, r_i, E, h) & u_{13}(r_a, r_i, \nu, h, \varphi) \omega^2 \\ u_{21}(r_a, r_i, \nu, E, h) & u_{22}(r_a, r_i, \nu) & u_{23}(r_a, r_i, \nu, E) \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e$$

Abhängigkeit von der Radien  $(r_a, r_i)$   
 der Scheibenhöhe  $(h)$   
 der Querkontraktionszahl  $(\nu)$   
 der E-Modul und der Dichte  $(E, \rho)$   
 und der Umfangsgeschwindigkeit  $(\omega)$

Idee der Herleitung:



③ Kräftegleichgewicht mit Flächenkraft  $dF$  aufstellen und Verschiebungs-Versorgungsrelation bestimmen  $E_r, E_\varphi$

Scheibenelement freischneiden

Zusammenfügen und Ansatz der Höhe  $h(r) = Cr^n$  einsetzen

→ führt zu Dgl 2. Ordnung, quasi nur numerisch lösbar

④ Annahme:  $n=0$ , also  $h(r) = Cr^0 = C = h$  konstante Höhe/Dicke der Scheibe

⑤ Lösung der veränderten Dgl durch aufteilen in homogenen & partikulären Anteil  $\Rightarrow$  3 Gleichungen für Spannung in Radialrichtung  $\sigma_r$ , Spannung entlang der Winkels  $\sigma_\varphi$  und Verschiebung

$$\sigma_r^{(h)} = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{\rho \omega^2 (3 + \nu)}{8} r^2, \quad \sigma_\varphi^{(h)} = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1}{8} (\rho \omega^2 (1 + 3\nu)) r^2$$

$$v_r^{(h)} = \frac{1}{E} \left[ A_1 (1 - \nu) r - \frac{A_2}{r} (1 + \nu) - \frac{1}{8} \rho \omega^2 (1 - \nu^2) r \right]$$

⑥ Um die Faktoren  $A_1, A_2$  zu bestimmen müssen für die Einzelfälle RB gefunden werden







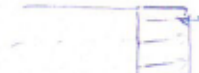
1. Bernoulli Schubfaser



hoh-Querschnitt also bei Biegung:



Torsionsschubfaser  $v \neq 0$



hoh-Querschnitt:



Realität:

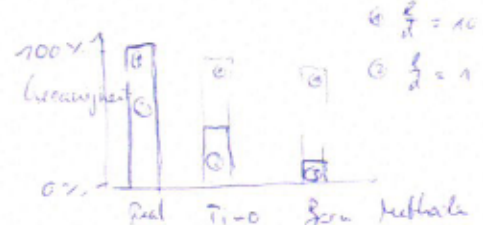


Querschnittswinkel mit Randfaser die keine Schub erfahren



$x \rightarrow$  Berücksichtigen die Krümmung der Stirnfläche Korrekturfaktor für Annahme...

Längenverhältnis zu Dicke



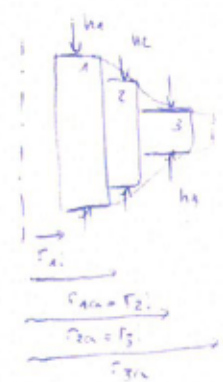
... konstanter Schubspannung

$$W = \underbrace{\int \frac{M_1^2}{2EI_1} + \frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} + \frac{V^2}{2EA}}_{\text{Bernoulli}} + \underbrace{\frac{x_1 Q_1^2 + x_2 Q_2^2}{2GA}}_{\text{Ti-schubfaser}} dx$$



Berechnungsmethoden: a) FEM  
b) Scheibe DNL data wird distorsioniert

$$U_{ges} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \omega^2 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$v_{1,2} = v_{2,1}$$

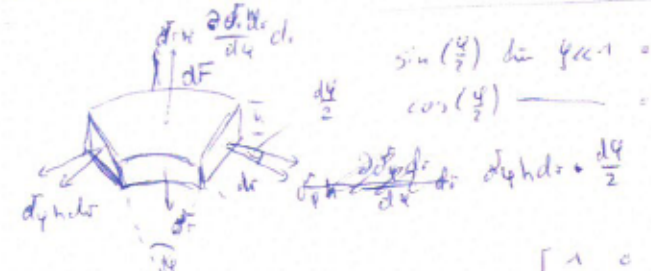
$$\delta_{11} u_1 = \delta_{22} u_2$$

$$\vec{z}_{1,2} = \frac{u_1}{u_2} \vec{z}_{1,2}$$

$$2 \times 3 = \frac{u_1}{u_2} \frac{u_3}{u_4} \vec{z}_{1,2}$$

$$\vec{z}_{1,2} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{um } 3 \times 3 \text{ also diagonale Matrix zu erhalten}$$

- a)  $\Rightarrow$  größte Masse  $\Rightarrow$  größte Flächkraft  $\Rightarrow$  größtes Spannungsgesamtheit
- b)  $\Rightarrow$  mittlere Masse  $\Rightarrow$  mittlere  $\dots$   $\rightarrow$  mittlere  $\dots$
- c)  $\Rightarrow$  kleinste  $\dots$   $\rightarrow$  kleinste  $\dots$   $\rightarrow$  kleinste  $\dots$



Kräftegleichgewicht: Höhenform  $h(r) = C \cdot r^h$   
 Dehnungsrelationen:  $\Rightarrow$  DNL 2. Ord.  
 $\epsilon_\varphi, \epsilon_r \rightarrow 2D$

ohne Loch:  $\tau_2 = 0$  fällt weg

$$U_{ges} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{13} \omega^2 \\ u_{21} & 0 & u_{23} \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \epsilon_\varphi = \frac{(\delta_r - v_r \delta_\varphi)}{E}$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{v_r}{r} \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\delta_\varphi - v_r \delta_r)$$

$$\frac{v_r}{r} = \frac{1}{E} (\delta_\varphi - v_r \delta_r)$$

$$\frac{v_r}{r} E + v_r \delta_r = \delta_\varphi$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \delta_r = -v_r \delta_\varphi$$

$$\frac{\delta_r}{v_r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{E}{v_r} = \delta_\varphi$$

$$Q_A = \int_V \frac{1}{A} \left( \frac{\partial(x,y,z)}{\partial x_{max}} \right)^2 dV$$

Lange Stäbe  
mit gleicher  
Bauteilform  
da- kann  
man aufteilen ...

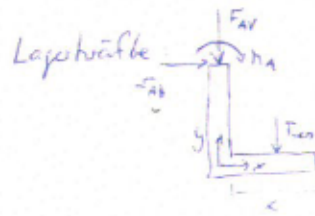
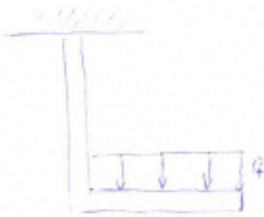
$$Q_A = Q_{A1} + Q_{A2}$$

$$Q_A = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{ges}} Q_{A,i} \quad Q_{A2,i}$$

Beispiel

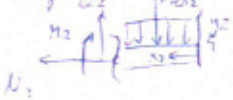
$$Q_{A1} = \int_A \frac{1}{A} \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial x_{max}} \right)^2 dA$$

$$Q_{A2} = \int_L \frac{1}{L} \left( \frac{\partial(z)}{\partial x_{max}} \right)^2 dz$$



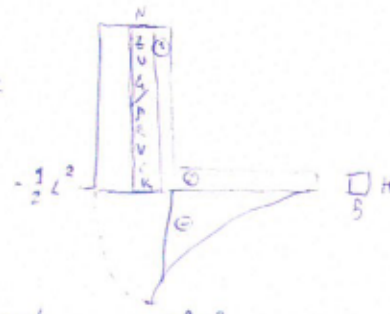
$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 & F_{Ah} &= 0 \\ \sum F_V &= 0 & -F_{Av} - F_{res} &= 0 \\ & & F_{Av} &= -F_{res} = -\frac{q}{2}L \\ \sum M_A &= 0 & -M_A - F_{res} \frac{L}{2} &= 0 \\ & & M_A &= -\frac{q}{2}L^2 \end{aligned}$$

Biegemomentenverlauf:



$$M_2 \sum M_{A2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow M_2 + F_{res2} x_2 = 0$$

$$M_2 = -F_{res2} x_2 = -\frac{q}{2} x_2^2$$



$$\frac{V_1}{V_{ges}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_2}{V_{ges}} = \frac{1}{2}$$

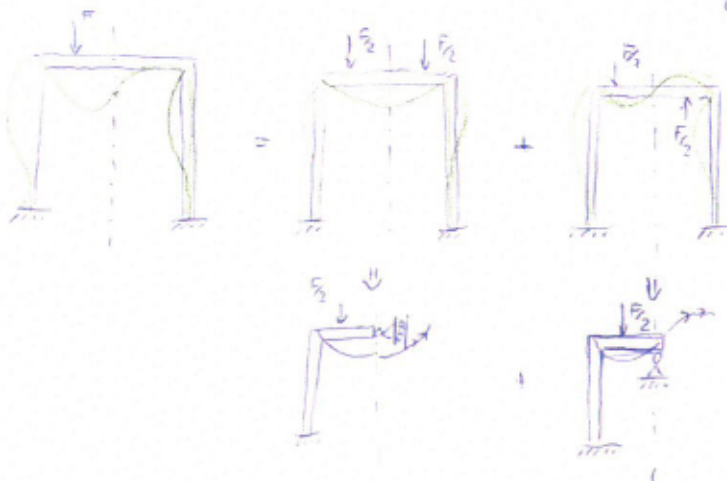
$$Q_{A1,1} = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial x_{max}} \right)^2 dA \quad \text{weil } \eta_1 \text{ konst.}$$

$$Q_{A2,1} = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial(z)}{\partial x_{max}} \right)^2 dz = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial(z)}{\partial x_{max}} \right)^2 dz = 1$$

$$Q_{A1,2} = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial x_{max}} \right)^2 dA = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{-\frac{q}{2} z^2 y}{I_b} \right)^2 dA = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{q^2 z^4 y^2}{4 I_b^2} \right) dA = \frac{q^2 z^4}{4 I_b^2} \int_A y^2 dA = \frac{q^2 z^4}{4 I_b^2} \cdot \frac{6H^3}{12} = \frac{1}{3}$$

$$Q_{A1,2} = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{\partial(x,y)}{\partial x_{max}} \right)^2 dA = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{-\frac{q}{2} z^2 y}{I_b} \right)^2 dA = \frac{1}{3}$$

$$Q_{A2,2} = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\partial(z)}{\partial x_{max}} \right)^2 dz = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{-\frac{q}{2} z^2 / w_b}{\frac{3}{2} z^2 / w_b} \right)^2 dz = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{9} \int_0^L 1 dz = \frac{1}{9}$$

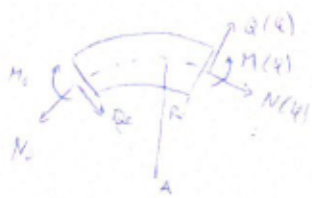


$$w = \int \frac{M^2}{2EI_x} + \frac{M^2}{2EI_y} + \frac{M^2}{2EI_z} + \frac{N^2}{2EA} + \frac{x_1 Q_1^2 + x_2 Q_2^2}{2GA} dz$$

- \* Bernoulli (schubfest)
- \* Ti-scheibe (schubweich)
- \* Ebene Querschnittsfläche keine Schubspannung
- \* Ebene Querschnittsfläche
- \* Lineare konst. Schubspannung
- Realität: keine eb. GA
- < keine konst. Querschubspannung
- \* x, y, z müssen konst. in Realität sein







$$\sum M^{\text{ext}} = 0 \quad M - M_0 + N_0 R - N(x) R = 0$$

$$M - N(x) R = M_0 - N_0 R$$

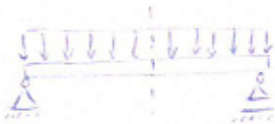
$$-\frac{M}{R} + N = -\frac{M_0}{R} + N_0 \Rightarrow \text{bessere Normalkraft } F^* = N + \frac{M}{R}$$

1) Durch Krümmung des Balkens ist  $R \gg 1$  und somit ist der Term  $\frac{M}{R}$  nicht mehr vernachlässigbar

$$= N(x) + \frac{M(x)}{R}$$

2) ?

Platte:



Zur Berechnung der DGL braucht man 4 RB da

DGL 4. Ordnung  $\Rightarrow$  4 mal Integrieren  $\Rightarrow$  4 unbestimmte

$$1) w(x=0) = 0 \quad \& \quad w(x=l) = 0$$

$$2) w'(x = \frac{l}{2}) = 0$$

$$3) w''(x=0) = w''(x=l) = 0$$

$$4) w'''(x=l) = 0 ?$$

