Technische Universität Berlin, Berlin, 04.08.2017

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Klausur: Berechenbarkeit und Komplexität

(Niedermeier/Froese/Molter, Sommersemester 2017)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**
(9)	(10)	(8)	(12)	(11)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

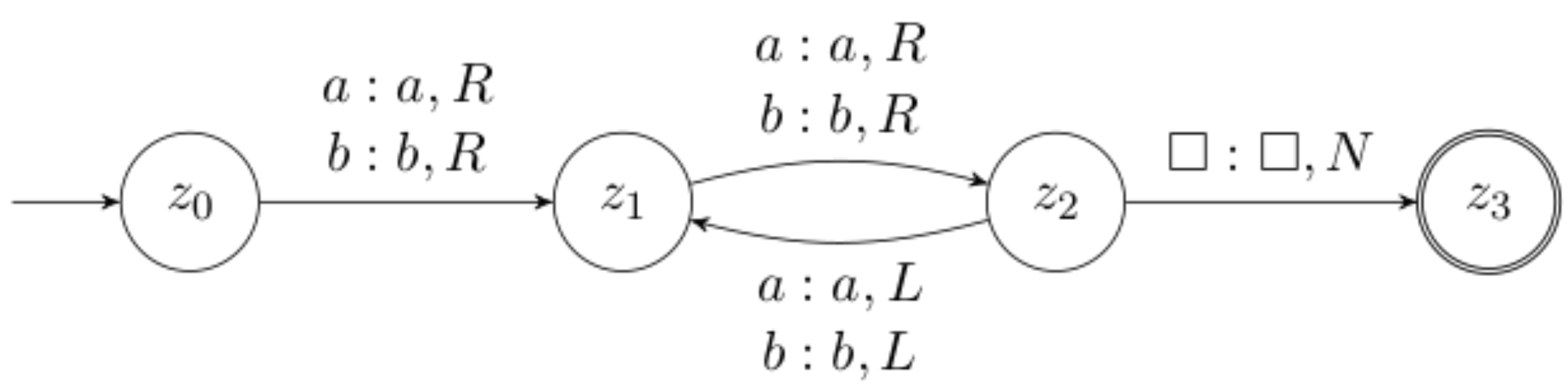
Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Turing-Maschinen** (3 + 3 + 3 Punkte)

Betrachten Sie die deterministische Turing-Maschine

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_3\}),$$

wobei δ wie folgt definiert ist:



(a) Hält M auf dem Eingabewort aba?

(b) Auf wievielen verschiedenen Bandzellen befindet sich der Leseschreibkopf von M maximal bei einer beliebigen Eingabe $x \in \{a, b\}^*$?

(c) Ist die von M akzeptierte Sprache $T(M)$ entscheidbar?

Aufgabe 2: **Die Komplexitätsklasse P** (5 + 5 Punkte)

Im Folgenden sei Σ ein endliches Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$ seien zwei Sprachen in P.

Begründen Sie für die beiden folgenden Sprachen, dass diese auch in P liegen (eine informelle algorithmische Beschreibung ist hierbei ausreichend).

(a) $A \cup B$

(b) $(\Sigma^* \setminus A) \cap (\Sigma^* \setminus B)$

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 3: **Transitivität von Polynomzeitreduktionen** (4+4 Punkte)

Im Folgenden seien Σ und Π zwei endliche Alphabete. Betrachten Sie die folgenden beiden Reduktionstypen.

Definition 1. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **linearzeit-reduzierbar** bzw. **quadratzeit-reduzierbar** auf eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (in Zeichen $A \leq_m^\ell B$ bzw. $A \leq_m^q B$) genau dann, wenn es eine totale, in *linearer* Zeit ($O(|x|)$ für jedes $x \in \Sigma^*$) bzw. *quadratischer* Zeit ($O(|x|^2)$ für jedes $x \in \Sigma^*$) berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Pi^*$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

(a) Begründen Sie die Transitivität für einen der beiden Reduktionstypen.

(b) Argumentieren Sie kurz (in 2-3 Sätzen), warum Transitivität im Kontext des Vollständigkeitskonzepts eine sinnvolle Eigenschaft für Reduktionen ist.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Polynomzeitreduktion** (4+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

HAMILTONPFAD
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Gibt es einen Pfad in G, der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

HAMILTONKREIS
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

Geben Sie eine Polynomzeitreduktion f von HAMILTONPFAD auf HAMILTONKREIS an, indem Sie

(a) einen Knoten zum Eingabegraph hinzufügen und diesen geeignet mit den restlichen Knoten verbinden,

(b) begründen, dass f in Polynomzeit berechnet werden kann,

(c) zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $G \in$ HAMILTONPFAD $\Rightarrow f(G) \in$ HAMILTONKREIS und

(d) zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $f(G) \in$ HAMILTONKREIS $\Rightarrow G \in$ HAMILTONPFAD.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 5: **Vermischtes zu Komplexitätsklassen** (2 + 2 + 2 + 5 Punkte)

(a) Geben Sie eine Definition der Klasse NP an (ohne Begründung).

(b) Beschreiben Sie kurz und informell einen Algorithmus, der zeigt, dass SAT $\in$ PSPACE.

SAT
Eingabe: Aussagenlogische Formel F.
Frage: Ist F erfüllbar, d.h. gibt es eine $\{0, 1\}$-wertige Belegung der in F verwendeten Booleschen Variablen derart, dass F zu wahr (d.h. 1) ausgewertet wird?

(c) Beschreiben Sie kurz und informell einen Algorithmus, der zeigt, dass TAUT $\in$ PSPACE.

TAUT
Eingabe: Aussagenlogische Formel F.
Frage: Ist F eine Tautologie, d.h. wird F für alle $\{0, 1\}$-wertigen Belegungen der in F verwendeten Booleschen Variablen zu wahr (d.h. 1) ausgewertet?

(d) Geben Sie ein Inklusionsdiagramm an, das die Klassen P, PSPACE, coNP, DTIME(n^2) und NP enthält, und begründen Sie die angegebenen Inklusionen.