Technische Universität Berlin, Berlin, 09.10.2017

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Wiederholungsklausur: Berechenbarkeit und Komplexität

(Niedermeier/Froese/Molter, Sommersemester 2017)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\boldsymbol{\Sigma}$
(10)	(8)	(8)	(12)	(12)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

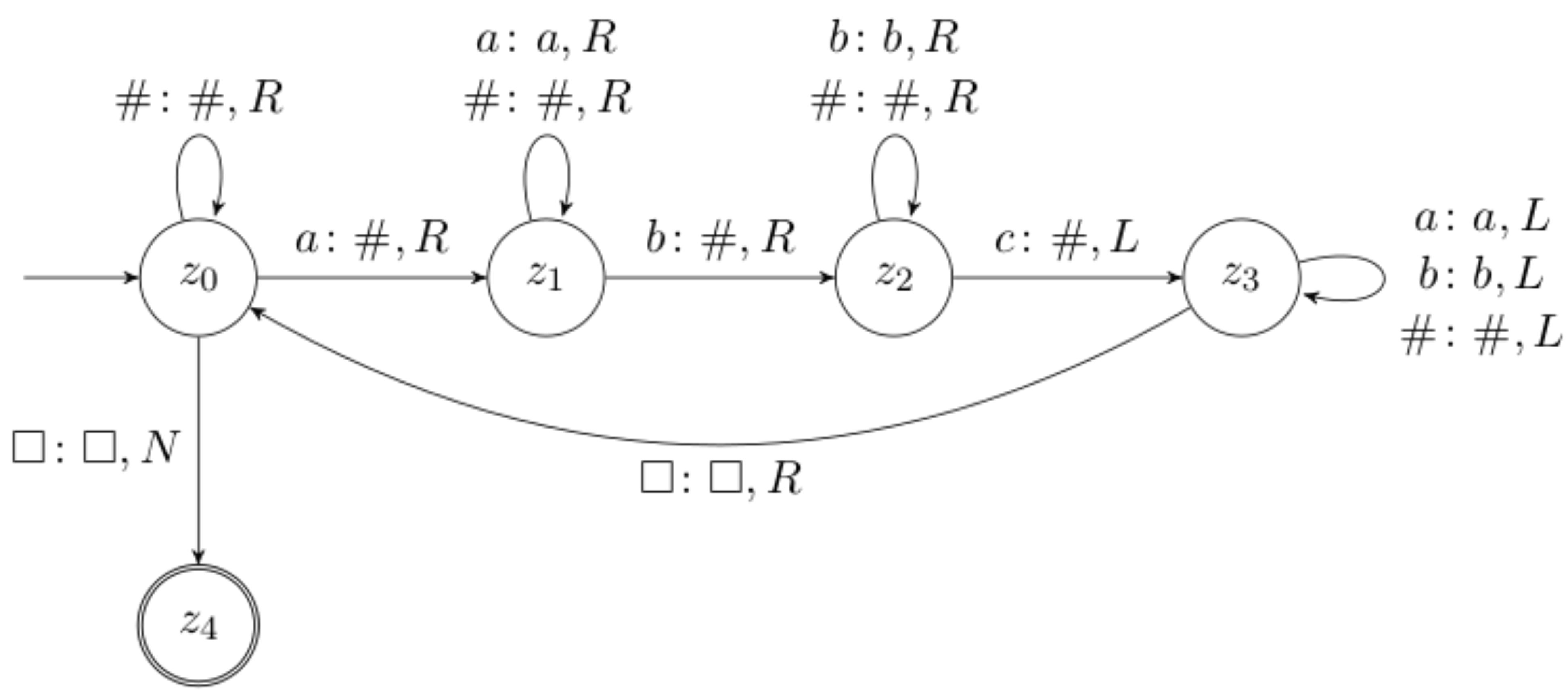
Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 1: **Turing-Maschinen** (5 + 5 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie durch Eintragen in die vorgegebenen leeren Kästchen die Übergangsfunktion δ der folgenden deterministischen Turing-Maschine

$$M_1 = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \#, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_4\}),$$

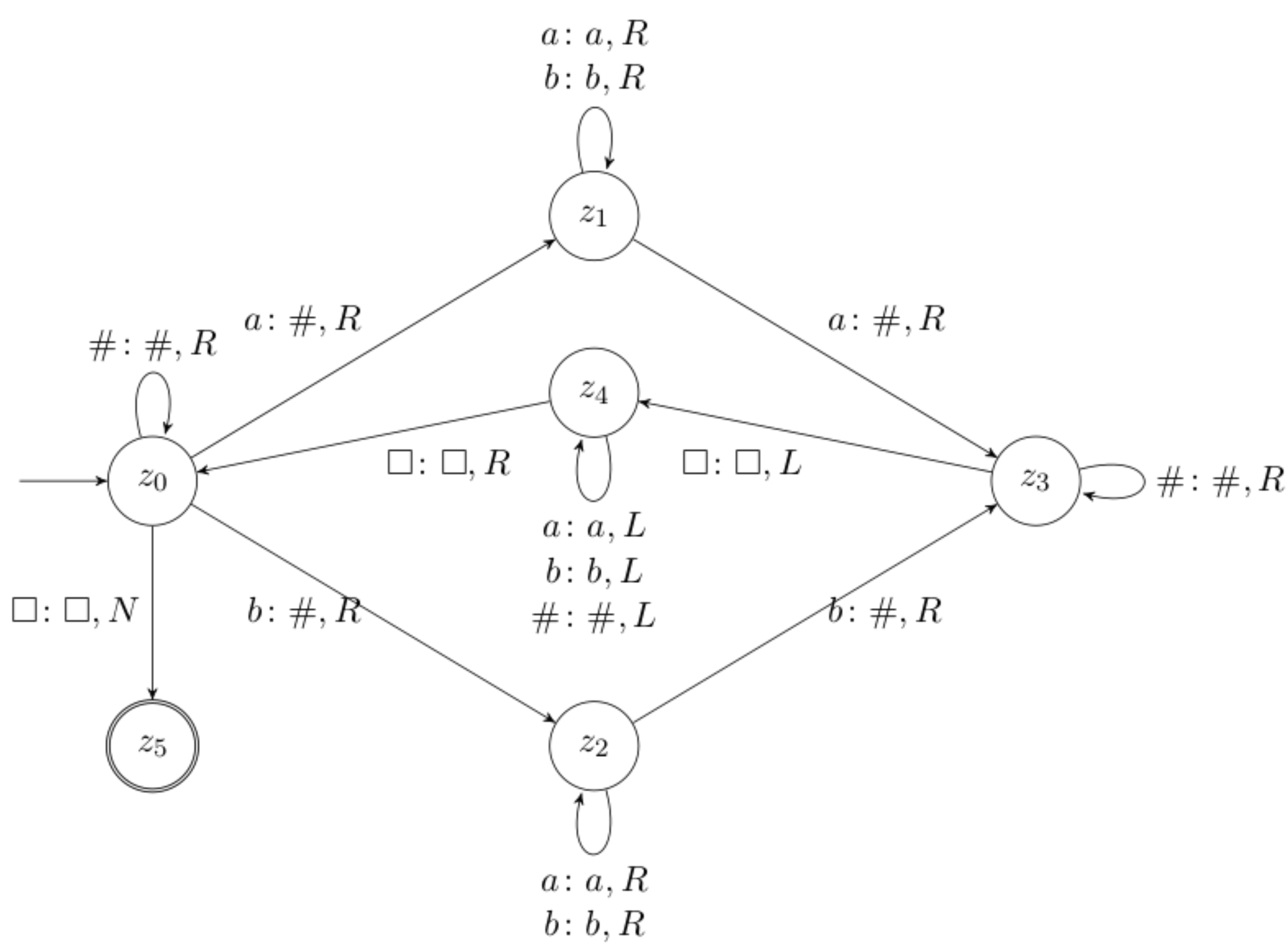
sodass $T(M_1) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Die Übergangsfunktion δ hat folgende graphische Darstellung:



(b) Vervollständigen Sie durch Eintragen in die vorgegebenen leeren Kästchen die Übergangsrelation δ der folgenden *nichtdeterministischen* Turing-Maschine

$$M_2 = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}, \{a, b\}, \{a, b, \#, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_5\}),$$

sodass $T(M_2) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, wobei das Wort w^R die Rückwärtsschreibweise von Wort w ist (also z.B. für $w = abb$ ist $w^R = bba$). Die Übergangsrelation δ hat folgende graphische Darstellung:



Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 2: **Die Komplexitätsklassen P und NP** (4 + 4 Punkte)

Im Folgenden sei Σ ein endliches Alphabet.

Begründen oder widerlegen Sie jeweils die beiden folgenden Aussagen.

(a) Seien A und B mit $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen. Falls A in P liegt, so liegt auch B in P.

(b) Für jede Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ aus NP und für jede Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ aus P gilt, falls $A \cap B$ und $A \cap (\Sigma^* \setminus B)$ in P liegen, so liegt A in P.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

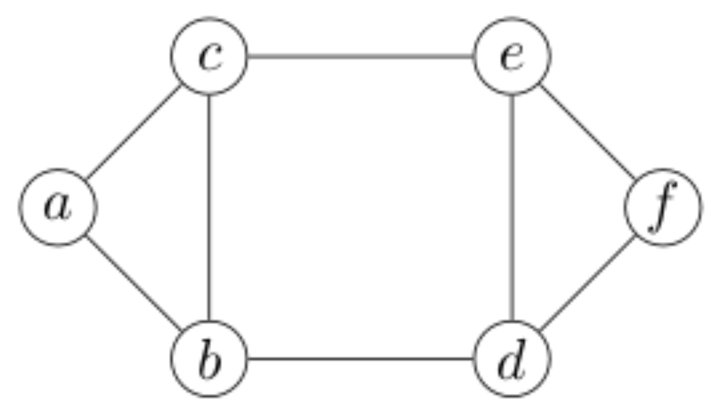
Aufgabe 3: **Graphbibliotheken** (2 + 6 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Graphprobleme.

Dominating Set
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass jeder andere Knoten mindestens einen dieser k Knoten als Nachbarn hat?

Vertex Cover
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass jede Kante mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat?

(a) Geben Sie ein kleinstmögliches Dominating Set und ein kleinstmögliches Vertex Cover für den abgebildeten Graphen an (ohne Begründung).



(b) Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeitalgorithmus $\mathcal{A}$ existiert, der Dominating Set entscheidet. Geben Sie einen Algorithmus an, der Vertex Cover in polynomieller Zeit unter Benutzung von $\mathcal{A}$ entscheidet und begründen Sie dessen Korrektheit.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

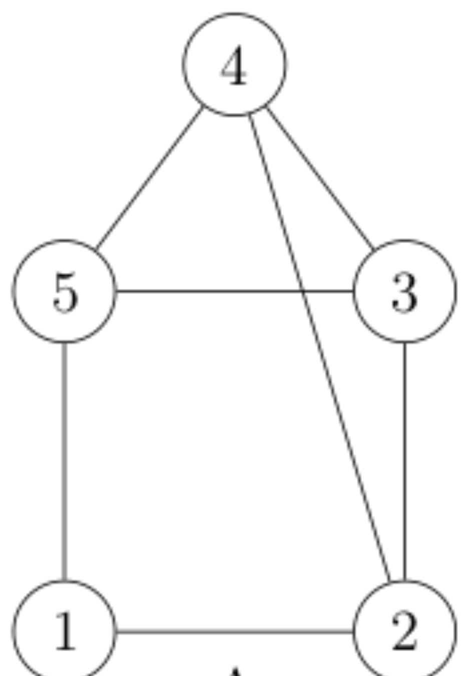
Aufgabe 4: **Polynomzeitreduktion** (3 + 2 + 1 + 3 + 3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

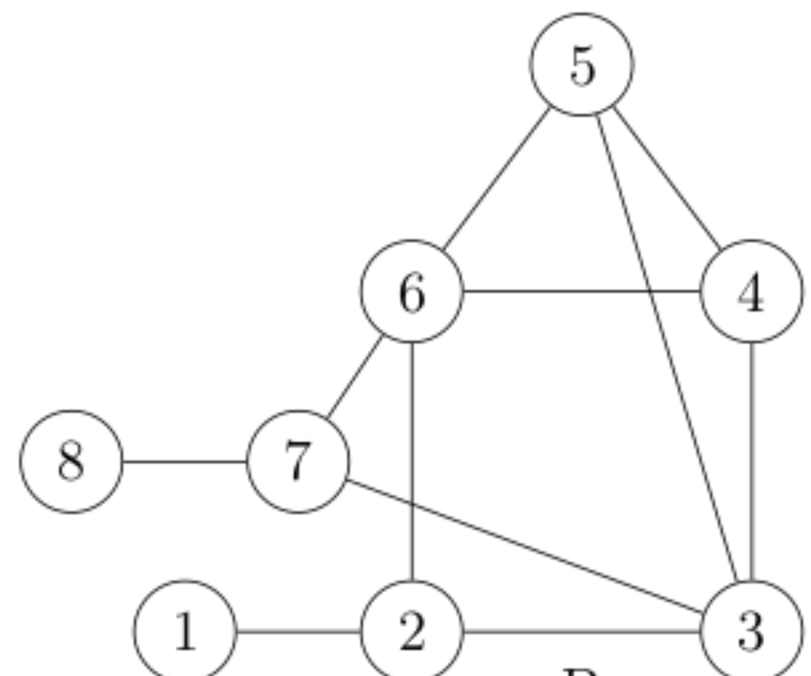
Hamiltonkreis
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

Hamiltonpfad
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Gibt es einen Pfad in G, der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

(a) Kennzeichnen Sie durch Nummerierung der Knoten in Graph A einen *Hamiltonkreis* und in Graph B einen *Hamiltonpfad*.



A



B

(b) Geben Sie eine Polynomzeitreduktion f von Hamiltonkreis auf Hamiltonpfad an, indem Sie

i. drei Knoten zum Eingabegraph hinzufügen, von denen zwei Knotengrad eins haben, und diese geeignet mit den restlichen Knoten verbinden,

ii. begründen, dass f in Polynomzeit berechnet werden kann,

iii. zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $G \in$ Hamiltonkreis $\Rightarrow f(G) \in$ Hamiltonpfad und

iv. zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $f(G) \in$ Hamiltonpfad $\Rightarrow G \in$ Hamiltonkreis.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 5: **Vermischtes zu Komplexitätsklassen** (4+4+4 Punkte)

(a) Sei A eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ coNP-vollständig ist.

(b) Sei A eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass „$A \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{coNP} = \mathrm{P}$“ gilt.

(c) Begründen oder widerlegen Sie kurz die folgende Behauptung:

Unter der Annahme $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dass CLIQUE auf Graphen mit maximalem Knotengrad 17 NP-vollständig ist.

CLIQUE
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.
Frage: Hat G einen vollständigen Teilgraphen mit mindestens k Knoten?