cg/cv Ausschnitte aus der Klausur im SS 2006

Aufgabe: Abstandsberechnung (7 Punkte)

a. (5 Punkte) Gegeben sei ein Punkt $\mathbf{q}_1 = [8, -4, 4]^T$ und eine Gerade $\mathbf{g} = \mathbf{p}_1 + s \cdot \mathbf{v}_1$, s im Intervall $(-\infty, \infty)$, mit $\mathbf{p}_1 = [1, 0, 0]^T$ und $\mathbf{v}_1 = [2, 1, -1]^T$. Bestimmen Sie den kleinsten Abstand vom Punkt $\mathbf{q}_1$ zur Gerade **g**. Welcher Punkt auf der Gerade **g** hat den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{q}_1$?

b. (2 Punkte) Gegeben sei ein Punkt $\mathbf{q}_0 = [0, 0, 0]^T$ und ein Strahl $\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 + t \cdot \mathbf{v}_0$, t im Intervall $[0, \infty)$, mit $\mathbf{p}_0 = [1, 1, 1]^T$ und $\mathbf{v}_0 = [1, 1, 1]^T$. Bestimmen Sie den kleinsten Abstand vom Punkt $\mathbf{q}_0$ zum Strahl **r**. Welcher Punkt auf dem Strahl **r** hat den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{q}_0$?

Aufgabe: Kleinste Fehlerquadrate (15 Punkte)

Gegeben sind vier Punkte im R^3 (jeweils als $\mathbf{p}_i = [x, y, z]^T$) und zwar

$\mathbf{p}_1 = [1, 2, 0]^T$, $\mathbf{p}_2 = [1, -1, -1]^T$, $\mathbf{p}_3 = [1, -1, 1]^T$ und $\mathbf{p}_4 = [-3, 0, 0]^T$.

In den Folgenden Aufgabenteilen sind die Koeffizienten $\mathbf{x} = [A, B, C]^T$ der Ebene $z = Ax + By + C$ zu bestimmen, und zwar so dass die z-Abstände dieser Ebene zu den Punkten $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ und $\mathbf{p}_4$ im sinne der kleinsten Fehlerquadrate minimal sind.

a. (4 Punkte) Stellen Sie das zugehörige, überbestimmte lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ auf.

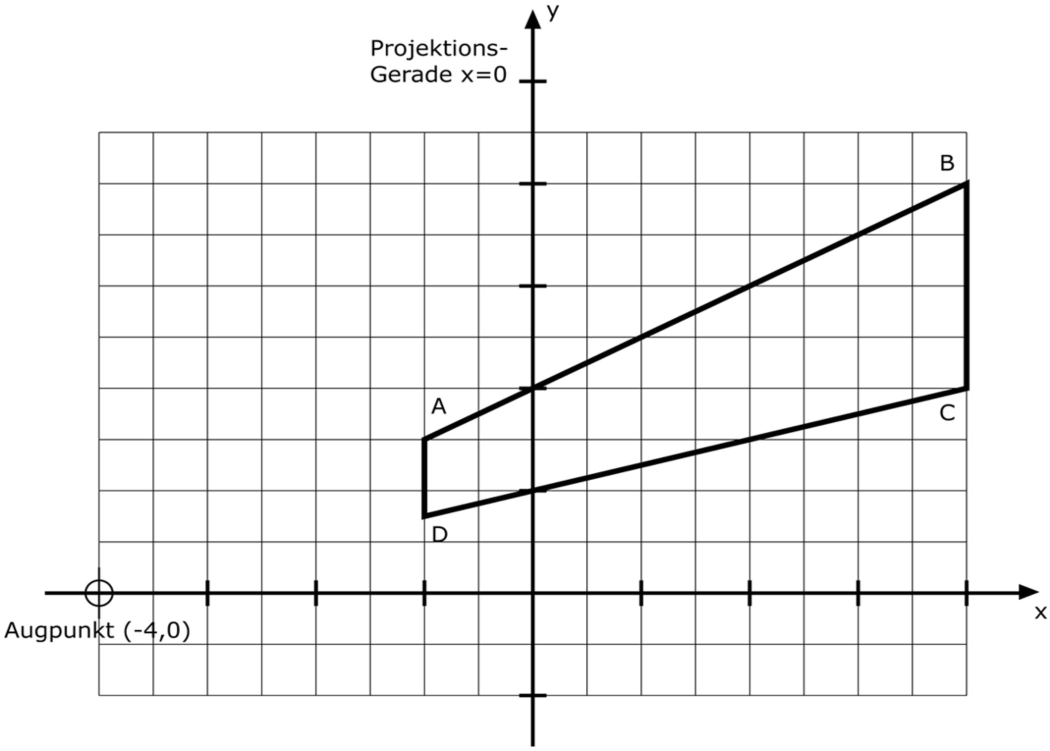
b. (2 Punkte) Welche Dimension hat der Spaltenraum S(**A**) der Matrix **A** ? Begründen Sie Ihre Antwort.

c. (2 Punkte) Ist **b** ein Element von S(**A**) ? Begründen Sie anhand einer kleinen Rechnung Ihre Antwort.

d. (4 Punkte) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Was fällt Ihnen an der Besetzungsstruktur dieser Matrix auf ? Welche Eigenschaft hat demnach die Matrix **A** ?

e. (3 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten A, B und C als $[\mathbf{A}^T\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$, und beschreiben Sie (formal und in Worten) die resultierende Ebene.

Aufgabe: Perspektivische Transformation und Projektion (9 Punkte + 2,5 Bonuspunkte)



Gegeben sei das Viereck **ABCD** mit den (homogenen) Punkten **A** = $[-1, 3/2, 1]^T$, **B** = $[4, 4, 1]^T$, **C** = $[4, 2, 1]^T$ und **D** = $[-1, 3/4, 1]^T$, die Projektionsgerade x = 0 (die y-Achse), sowie der Augpunkt $[-4, 0, 1]^T$. Im Folgenden ist das Viereck **A**'**B**'**C**'**D**' *nach* der perspektivischen Transformation zu ermitteln. Dabei ist (unter Anderem) zu **beachten**: Bei dieser Transformation werden Punkte der Form $[x, y, w]^T$ auf $[x, y, (x/4 + w)]^T$ abgebildet.

a. (4 Punkte) Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Geraden **A**'**B**' und **C**'**D**' *nach* der perspektivischen Transformation. Zeichnen Sie beide Linien in das obige Diagramm, und begründen Sie Ihre Antwort. (Bitte beachten Sie, dass die (unendlich langen) *Geraden* **A**'**B**' und **C**'**D**' gemeint sind, und **nicht** die Geraden*segmente*)

b. (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden **A**'**B**' und **C**'**D**' *nach* der perspektivischen Transformation.

c. (2 Punkte) Berechnen Sie die perspektivische Transformation der Punkte **A**, **B**, **C** und **D** und zeichnen Sie das perspektivisch transformierte Viereck **A**'**B**'**C**'**D**' in das obige Diagramm.

d. (1 Punkt + 2,5 Bonus) Schneiden sich die Geraden **A**'**B**' und **C**'**D**' nach der perspektivischen Transformation (PT) in einem (endlich weit entfernten) **Fluchtpunkt** ? Wenn nicht, wo müsste der Punkt **A** (vor der PT) liegen, damit sich **A**'**B**' und **C**'**D**' nach der PT in einem gemeinsamen, endlich weit entfernten Fluchtpunkt schneiden ? (Anm:Hierbei ist anzunehmen, dass die Punkte **B**, **C** und **D** fix bleiben). Berechnen Sie diesen Fluchtpunkt, und Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe (13 Punkte): Transformationsmatrizen

Im Folgenden sollen Sie jeweils die 16 Koeffizienten einer 4x4 Matrix angeben. Wenn der Wert eines Koeffizienten feststeht, geben Sie ihn als Zahl an. Ansonsten verwenden Sie lateinische Buchstaben und zwar so, dass Koeffizienten, die den gleichen Wert haben, mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet werden. (13 Punkte)

a. (1 Punkt): Translation: $\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

b. (1 Punkt): Isotrope Skalierung: $\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

.

c. (2 Punkte): 90 Grad Rotation um die y-Achse: $\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

d. (3 Punkte): 120 Grad Rotation um die Achse (1,1,1): $\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

e. (3 Punkte): Transformationen, die achsenparallele Quader in achsenparallele Quader überführen: $\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

f. (3 Punkte): Zeigen Sie, welche der 16 Koeffizienten bei affinen Abbildungen veränderlich sind, indem Sie ausnutzen, dass die uneigentliche Hypereben bei affine Transformation invariant ist.

Aufgabe (8 Punkte): Determinante, Skalarprodukt, Kreuzprodukt

Im Folgenden kreuzen Sie bitte die richtigen Antworten an. Es können jeweils eine oder mehrere Antworten richtig sein. Ankreuzen falscher Antworten führt zu Punktabzug.

a. (4 Punkte): Die Determinante einer $n \times n$ ($n > 1$) Matrix

- o ist Null g.d.w. die Matrix nicht invertierbar ist
- o entspricht für n=2 dem Flächeninhalt des von den Zeilenvektoren aufgespannten Parallelogramms
- o entspricht für n=2 dem Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms
- o entspricht bei Diagonalmatrizen dem Produkt der Diagonalelemente
- o ist Eins wenn die Matrix eine reine Rotation darstellt
- o hat den Wert s wenn die Matrix eine isotrope Skalierung mit Faktor s darstellt
- o hat den Wert s wenn alle Koeffizienten den Wert s haben
- o ist Null wenn die Matrix eine Projektion darstellt

b. (2 Punkte): Das Skalarprodukt zweier Vektoren

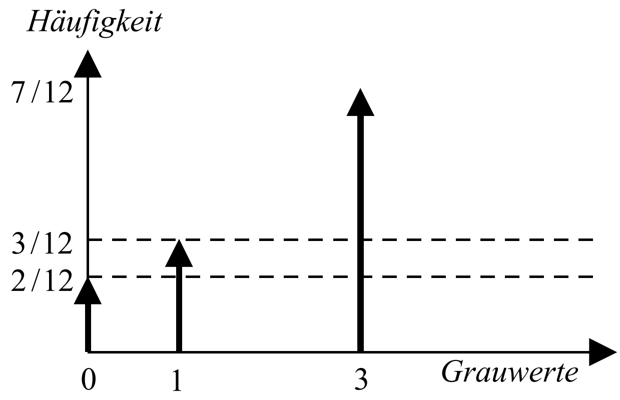
- o ist Null g.d.w. die Vektoren orthogonal sind
- o ist Eins g.d.w. die Vektoren identisch sind
- o ist symmetrisch
- o entspricht dem Sinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren, wenn diese normiert sind

c. (2 Punkte): Das Kreuzprodukt zweier Vektoren

- o ist für Vektorräume der Dimension $n > 1$ definiert
- o ist symmetrisch
- o ergibt den Nullvektor g.d.w. die Vektoren identisch sind
- o ergibt einen Vektor, der orthogonal zu den Argumenten ist

Aufgabe: Grauwertbilder (15 Punkte + 2,5 Bonus Punkte)

Gegeben sei das relative Histogramm eines Grauwertbildes:



Berechnen Sie:

a. (6 Punkte) ein 4x6 Bild, das dieses Histogramm haben kann
b. (3 Punkte) den mittleren Grauwert des Bildes
c. (3 Punkte) die Varianz des Bildes
d. (3 Punkte) die Entropie des Bildes, wenn der Grauwertbereich [0 63] ist.

(2,5 Punkte) Was ist die maximale Entropie, wenn der Grauwertbereich [0, 63] ist?

Tipp: Das relative Histogramm h(k) eines MxN-Grauwertbildes ist die relative Häufigkeit, mit welcher der Grauwert k auftritt, d.h. h(k) = H(k) / MxN, wobei H(k) die Anzahl der Pixel mit den Grauwert k in diesem Bild ist.

Aufgabe: Histogrammausgleich (5 Punkte)

Eine Kamera liefert Grauwertbilder mit 4 Bits (d.h. Grauwertbereich [0, 15]). Gegeben sei ein Bild:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie das Bild nach dem Histogrammausgleich. Das transformierte Bild soll ebenfalls den Grauwertbereich [0, 15] haben.

Aufgabe: Rekonstruktion (10 Punkte)
In einem Kameramodell berechnet man die Projektion eines Weltpunktes auf das Bild wie folgt:

$$\begin{bmatrix} x_i w \\ y_i w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & o_x \\ 0 & f_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}}_{R} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}}_{T} \right)$$

In dieser Gleichung sind fx, fy, ox, oy die Parameter der inneren Orientierung der Kamera; R ist die Rotationsmatrix, T ist der Translationsvektor, und (x_i, y_i) ist die Projektion von (x, y, z) auf das Bild.

Die Projektion eines Weltpunktes unter Verwendung von $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$, fx = fy = 100, ox = 400 and oy = 300 sei (500, 500). Mit $T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ seien die Pixelkoordinaten (600, 0). Berechnen Sie die Weltkoordinaten dieses Punktes.

Aufgabe: Merkmalextraktion (10 Punkte)
Gegeben seien ein Grauwertbild und zwei Faltungskerne:

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad h_y = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $g_x = g * h_x$, $g_y = g * h_y$, und die Kantenstarke, $s(x,y) \approx |g_x(x,y)| + |g_y(x,y)|$

Tipp: Die Grauwerte der äußeren Pixel werden als 0 angenommen.