Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Geschäftsstelle Matheon, MA 3–1, Dorothea Kiefer
Dr. Torsten Mütze
Sven Jäger, Dr. Frank Lutz, Manuel Radons

SoSe 2018

Modulklausur zur Computerorientierten Mathematik I+II

21.07.2018, Beginn: 08:15 Uhr, Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Nachname, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bitte nicht mit Bleistift oder mit roter Farbe schreiben!

*Die Klausur ist mit mindestens **36** (ITM/NidI: **30**) **Punkten** bestanden.*

1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
10	13	9	13	11	5	11	8	80

1. Aufgabe (2 + 4 + 4 Punkte)

(a) Ein vollständiger Graph ist ein einfacher, ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist. Es bezeichne $\mathbf{K}_n$ einen vollständigen Graphen mit n Knoten. Geben Sie ohne Begründung an:

(i) Wie viele Kanten hat $\mathbf{K}_n$?

Antwort: ____________________

(ii) Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält. Es sei $n \geq 3$. Wie viele Hamiltonkreise enthält $\mathbf{K}_n$?

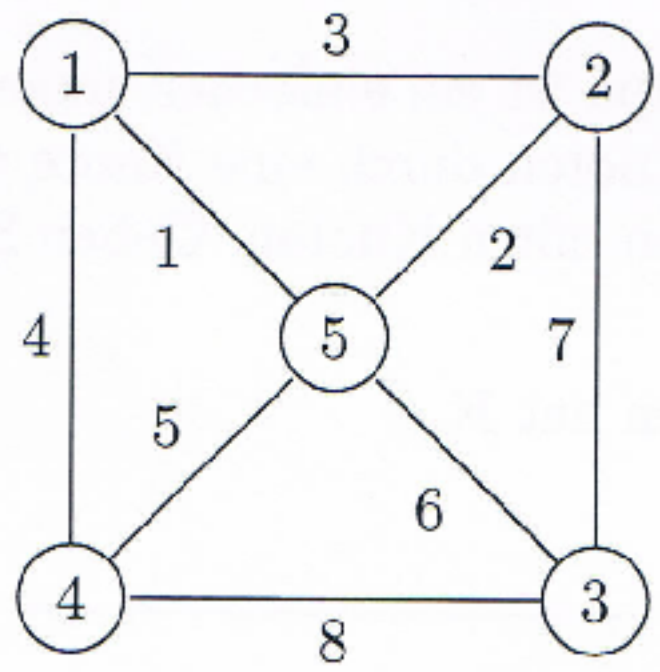
Antwort: ____________________

(b) (i) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

- Aufspannender Baum eines ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$.

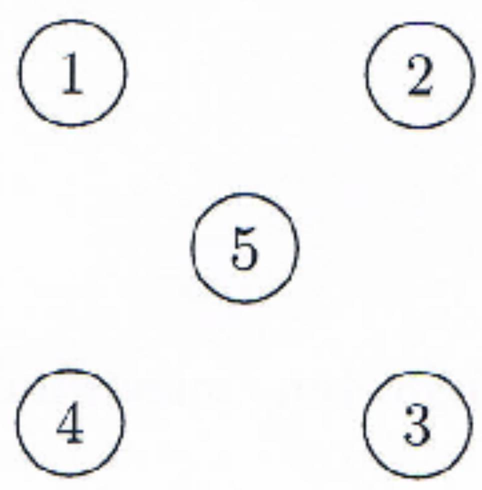
- Minimal aufspannender Baum eines gewichteten, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$. (Gehen Sie hierbei davon aus, dass der Begriff des aufspannenden Baumes schon gegeben ist.)

(ii) Es sei folgender ungerichteter, gewichteter Graph G gegeben.

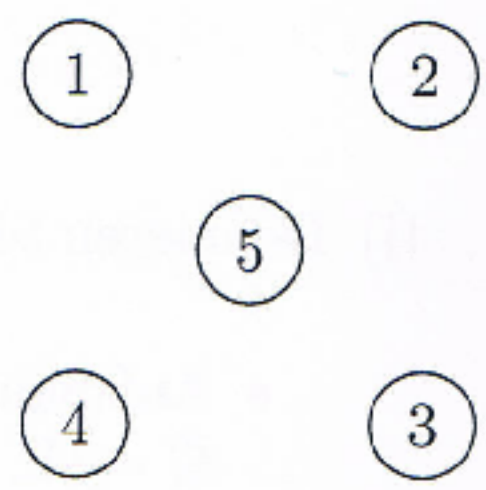


Führen Sie auf G den Algorithmus von Kruskal aus, indem Sie auf den folgenden Knotenmengen jeweils die mit den Zwischenstufen des Algorithmus korrespondierenden Kantenmengen eintragen.

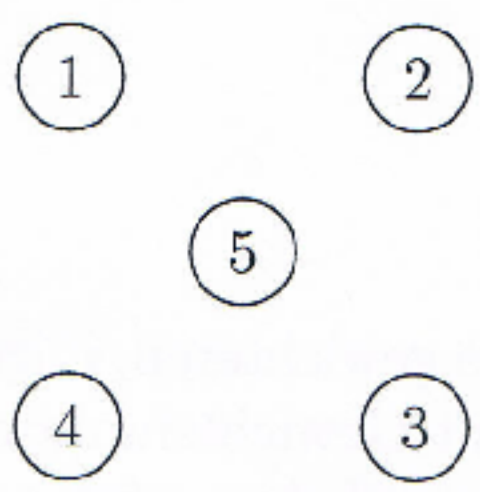
1)



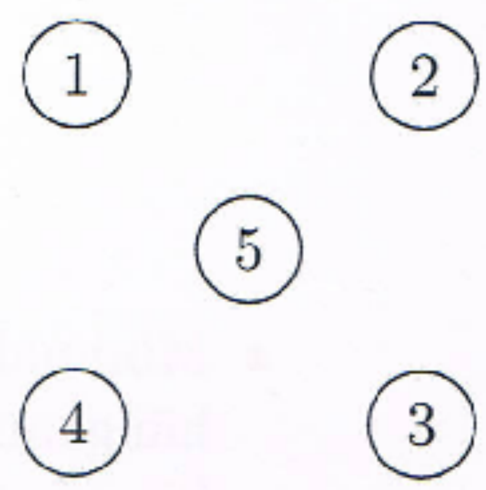
2)



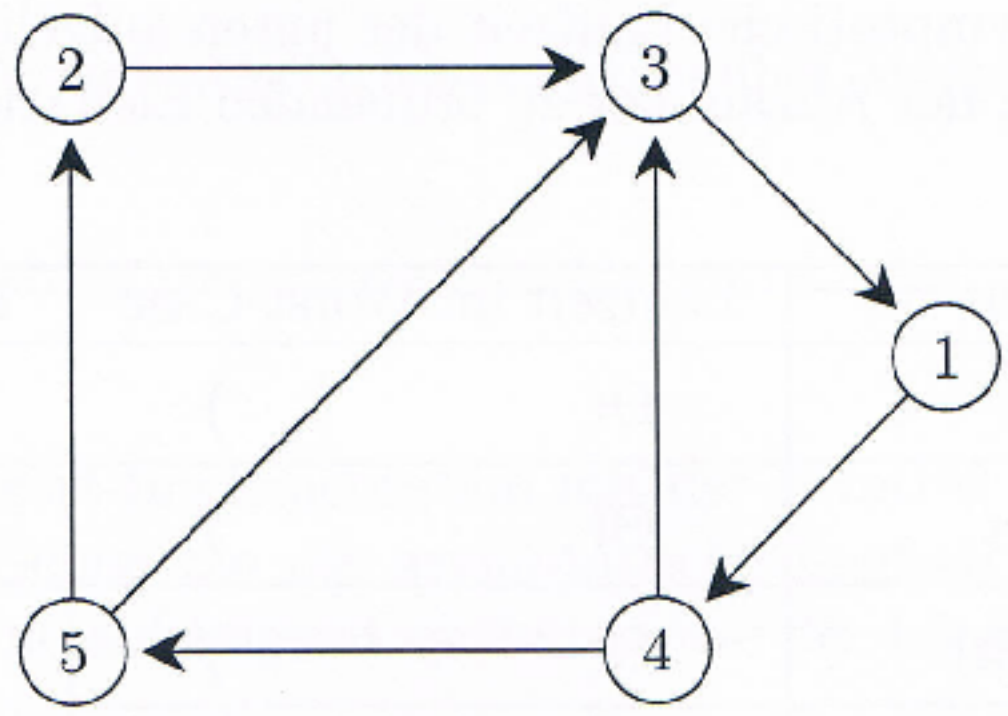
3)



4)



(c) Es sei folgender Digraph G gegeben:



(i) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G an:

(ii) Seien die Kanten von G wie folgt nummeriert: $e_1 = (1,4)$, $e_2 = (4,3)$, $e_3 = (4,5)$, $e_4 = (5,2)$, $e_5 = (5,3)$, $e_6 = (2,3)$, $e_7 = (3,1)$. Geben Sie die Inzidenzmatrix von G an:

2. Aufgabe (4 + 3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Geben Sie die asymptotische Laufzeit der unten aufgelisteten Sortieralgorithmen in Abhängigkeit von der Anzahl der zu ordnenden Elemente n in Landau-Notation an.

Verfahren	Laufzeit im Worst-Case	Laufzeit im Average-Case
Quicksort*	$\Theta(\qquad\qquad)$	$\Theta(\qquad\qquad)$
Mergesort	$\Theta(\qquad\qquad)$	$\Theta(\qquad\qquad)$
Insertionsort	$\Theta(\qquad\qquad)$	$\Theta(\qquad\qquad)$
Heapsort	$\Theta(\qquad\qquad)$	$\Theta(\qquad\qquad)$

* Quicksort mit zufälligem Pivotelement.

(b) Führen Sie Mergesort für die folgende Liste durch.

$$[8, 7, 12, 4, 2, 6, 9, 3].$$

Geben Sie hierbei den Zustand der Liste nach jedem Merge-Schritt an:

(c) Fragen zu Quicksort:

(i) Geben Sie einen Vorteil von Quicksort gegenüber Mergesort an.

Antwort: ______________________________

(ii) Es sei eine Quicksort-Implementation mit der Pivotregel „wähle das linke Element“ gegeben. Geben Sie die asymptotische Laufzeit dieses Algorithmus in Θ-Notation für eine aufsteigend sortierte Liste der Länge n an.

Antwort: ______________________________

(iii) Wie kann man Quicksort modifizieren, so dass die Worst-Case Laufzeit in $\Theta(n \log n)$ liegt?

Antwort: ______________________________

(d) Gegeben sei ein Array mit n positiven ganzen Zahlen zwischen 0 und $2^n - 1$ in binärer Darstellung, jeweils mit der minimalen Zahl an Bits codiert.

(i) Geben Sie die Worst-Case-Laufzeit von Radixsort unter diesen Umständen an.

Antwort: ______________________________

(ii) Was ist die erwartete Laufzeit von Radixsort, wenn die zu sortierenden Zahlen in $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ gleichverteilt gewählt sind?

Antwort: ______________________________

(iii) Geben Sie die Laufzeit von Radixsort unter der Voraussetzung an, dass es sich bei den Array-Einträgen um die Zahlen $\{0, \ldots, n-1\}$ handelt.

Antwort: ______________________________

3. Aufgabe (1 + 2 + 3 + 3 Punkte)

(a) Sei $(E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem (über der endlichen Grundmenge E). Was versteht man unter einer Basis des Unabhängigkeitssystems?

(b) Sei $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Formulieren Sie den Basisaustauschsatz.

(c) Betrachten Sie das Matroid $(E, \mathcal{I})$, wobei $E = \{a, b, c, d, e\}$ die Menge der Spalten der reellen Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 5 & 4 & 0 & * & -1 \\ 5 & 0 & 3 & * & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit noch unbestimmter Spalte d bezeichne und $\mathcal{I}$ die Menge der linear unabhängigen Teilmengen von E sei.

Geben Sie jeweils einen Vektor d an, so dass das Matroid $(E, \mathcal{I})$ die folgenden Kreise C hat:

(i) $C = \{\{a, c, e\}, \{d\}\}$

$d =$

(ii) $C = \{\{a, c, e\}, \{b, d\}\}$

$d =$

(ii) $C = \{\{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{c, d\}\}$

$d =$

(d) Gegeben sei ein Matroid $(E, \mathcal{I})$ mit $E = \{a, b, c, d, e\}$ und Basismenge

$$B \quad = \quad \{\,\{a, b, c, d, e\}\,\}.$$

Zeichnen Sie alle zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, so dass, nach Hinzufügen von Kantenlabels, $(E, \mathcal{I})$ das graphische Matroid von G ist.

4. Aufgabe (3 + 4 + 3 + 3 Punkte)

(a) Sei ein Datensatz mit n Elementen gegeben. Geben Sie in Abhängigkeit von n die asymptotische Komplexität der Suche nach einem Schlüssel in einer Hashtabelle an, die mit den unten genannten Hashverfahren erstellt wurde. Nehmen Sie an, dass die in der Vorlesung bei der Analyse des jeweiligen Verfahrens vorausgesetzten Spezifikationen des Formats der zugehörigen Hashtabellen erfüllt sind.

Verfahren	Best-Case	Worst-Case	Average-Case
Mit Verkettung	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$
Perfektes Hashing	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$	$\Theta(\quad)$

(b) Für eine positive ganze Zahl k sei $\mathbf{Z}_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Gegeben sind der Datensatz

$$[4, 11, 9, 12, 5, 7, 8]$$

und die Hashfunktion

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbf{Z}_7, \quad x \mapsto (3x + 5) \mod 7.$$

(i) Hashen Sie den Datensatz mit h, wobei Kollisionen mittels Verkettung aufgelöst werden. Geben Sie hierbei den Zustand der Hashtabelle nach jeder Einfügung an.

(ii) Hashen Sie den Datensatz mit h, wobei Kollisionen mittels linearer Sondierung aufgelöst werden. Geben Sie hierbei den Zustand der Hashtabelle nach jeder Einfügung an.

(c) Beantworten Sie die folgenden Fragen, begründen Sie dabei Ihre Antworten:

- Genügt das Hashen mit linearer Sondierung der Permutationsbedingung?

- Wie viele Sondierungssequenzen sind für die Funktion h aus (b) beim Hashen mit linearer Sondierung möglich?

(d) (i) Sei p eine Primzahl und $\mathbf{Z}_p^* := \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$. Seien weiterhin $a \in \mathbf{Z}_p^*$, $b \in \mathbf{Z}_p$.

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p\,, \quad x \mapsto (ax + b) \mod p$$

kollisionsfrei ist, d. h. aus $x \neq y$ mit $x, y \in \mathbf{Z}_p$ folgt $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Seien m, n positive ganze Zahlen und $a \in \mathbf{Z}_n$. Geben Sie ohne Begründung an, wie viele Kollisionen die Funktion

$$g : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n\,, \quad x \mapsto x \mod n$$

höchstens in a hat, d. h., wie viele Elemente in $\mathbf{Z}_m$ höchstens auf a abgebildet werden.

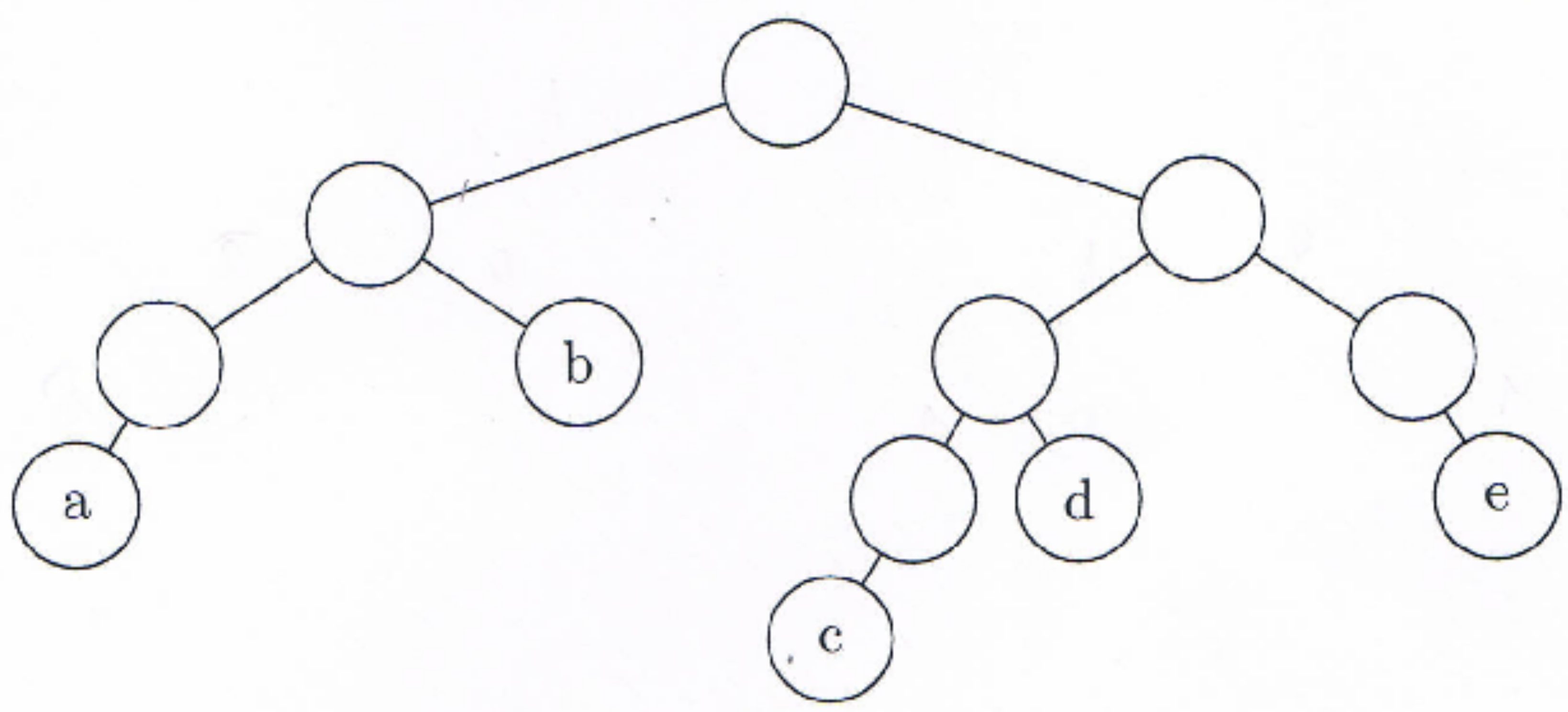
5. Aufgabe (2 + 2 + 2 + 1 + 3 + 1 Punkte)

(a) Geben Sie zwei eindeutig decodierbare Code-Arten an.

Antwort: ______________________________

Antwort: ______________________________

(b) Geben Sie den Präfix-Code an, der folgendem Binärbaum entspricht.

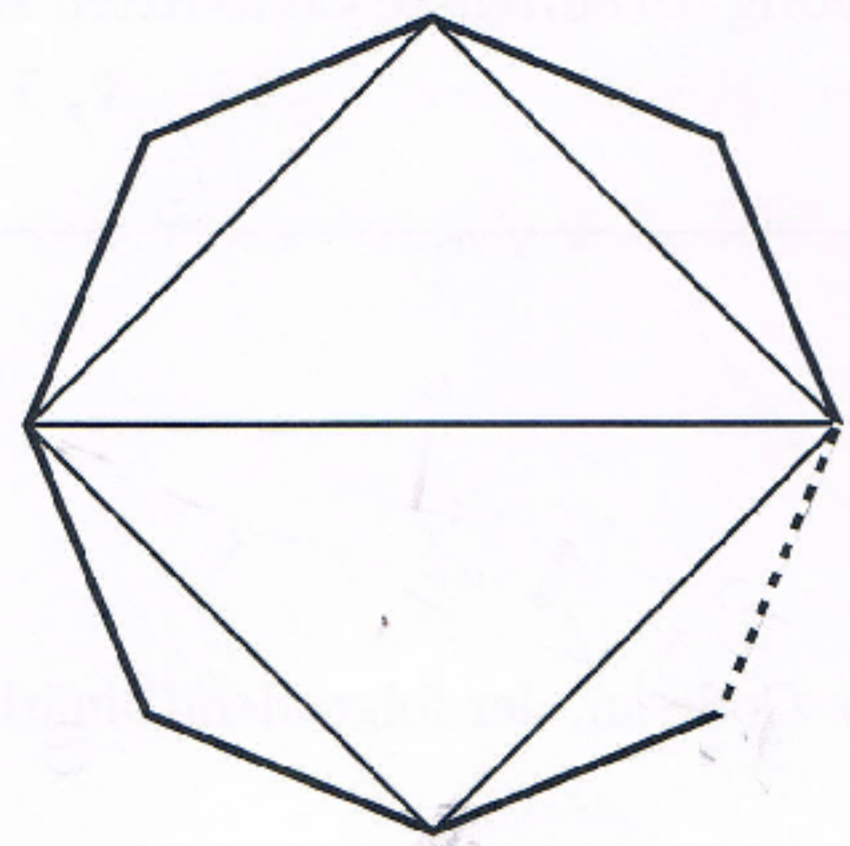


a	b	c	d	e

(c) Begründen Sie, dass der folgende Code nicht eindeutig decodierbar ist.

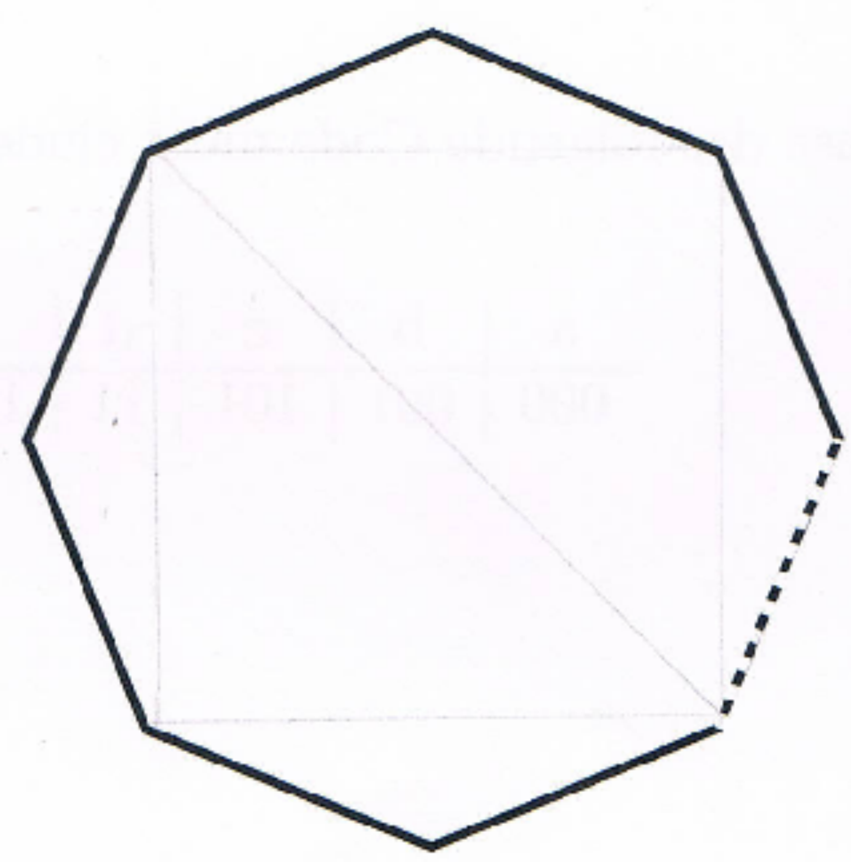
a	b	c	d	e	f
000	001	101	11	110	01

(d) Zeichnen Sie den dualen Graphen (Binärbaum) der folgenden Triangulierung eines 8-Ecks. Es sei dabei der Wurzelknoten durch die gestrichelte Linie ausgezeichnet.



(e) Führen Sie bei der Triangulierung aus (d) einen Flip so aus, dass der resultierende duale Graph ein AVL-Baum ist.

(i) Geben Sie die resultierende Triangulierung an:



(ii) Welcher Operation entpricht der Flip in Bezug auf den dualen Graphen aus (d)?

(f) Sei T die Triangulierung eines n-Ecks, wobei $n \geq 4$. Genau eine der folgenden Aussagen ist **falsch**. Geben Sie an, welche.

☐ Der duale Graph von T ist einfach.

☐ T hat genau $n-3$ Diagonalen und n Randkanten.

☐ Jede Diagonale trennt P in ein k-Eck und ein $(n-k+4)$-Eck (beide nicht notwendig regulär).

☐ T hat genau $n-2$ Dreiecke.

6. Aufgabe (1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Bei den folgenden Teilaufgaben (a)–(e) ist jeweils genau eine der zur Auswahl stehenden Antworten zutreffend. Kennzeichnen Sie die jeweils korrekte Antwort durch das Setzen genau eines Kreuzes pro Teilaufgabe.

(a) Seien $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist **wahr**?

- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h)$, so ist $h \in \Theta(f)$.
- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$, so ist $f \notin \Omega(g^2)$.
- ☐ Ist $f \in \Omega(g)$, so gibt es ein $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gibt mit $f(n) \geq \alpha g(n)$.
- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$, so gibt es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$, so dass für alle $\alpha > 0$ die Ungleichung $f(n) \leq \alpha g(n)$ gilt.

(b) Was ist die Ternärdarstellung von $(31)_{17}$ (Darstellung zur Basis 17)?

☐ 1221 ☐ 1212 ☐ 1222 ☐ 2112

(c) Welcher der folgenden Ausdrücke liefert in Python 3 `False`?

- ☐ 0.75 == 0.5 + 0.25
- ☐ 0.3 + 0.4 == 0.4 + 0.3
- ☐ 10 * 0.07 == 0.7
- ☐ 7 * 10 / 100 == 1 / 10 * 7

(d) Wir nennen das Gerüst eines Graphen einen aufspannenden Teilgraphen, dessen jede Zusammenhangskomponente ein Baum ist. Es sei nun G ein ungerichteter Graph mit drei Zusammenhangskomponenten G_1, G_2, G_3, welche jeweils n Kanten haben, wobei $n \geq 3$. Es sei dabei G_1 minimal zusammenhängend, G_2 habe die Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$ und die Kantenmege

$$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$$

und G_3 sei maximal kreisfrei. Wie viele Gerüste mit exakt drei Zusammenhangskomponenten hat G?

☐ $2n$ ☐ n ☐ 1 ☐ $n - 1$

(c) Es seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ☐ Wenn $L_2 \notin \mathbf{P}$ und L_2 polynomiell auf L_1 reduzierbar ist, so ist $L_1 \notin \mathbf{P}$.
- ☐ Wenn $L_1 \in \mathbf{NP} \setminus \{\emptyset, \Sigma_1^*\}$, so gilt $L_1 \neq \Sigma_1^*$.
- ☐ Wenn $L_2 \in \mathbf{P}$ und L_2 polynomiell auf L_1 reduzierbar ist, so ist $L_1 \in \mathbf{P}$.
- ☐ Wenn $L_1 \in \mathbf{NP} \setminus \{\emptyset, \Sigma_1^*\}$, so existieren Wörter $w \in L_1$ und $w' \in \Sigma_1^* \setminus L_1$.

7. Aufgabe (4 + 3 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die folgende deterministische Turingmaschine mit Startzustand q_0, Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{21}, q_{30}, q_{31}, q_4, q_5, q_6\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$ und Menge akzeptierender Zustände $F = \{q_6\}$:

δ	0	1	B
q_0	$(q_{10}, B, \mathtt{R})$	$(q_{11}, B, \mathtt{R})$	$(q_6, B, \mathtt{N})$
q_{10}	$(q_{10}, 0, \mathtt{R})$	$(q_{10}, 1, \mathtt{R})$	$(q_{20}, B, \mathtt{R})$
q_{11}	$(q_{11}, 0, \mathtt{R})$	$(q_{11}, 1, \mathtt{R})$	$(q_{21}, B, \mathtt{R})$
q_{20}	$(q_{20}, 0, \mathtt{R})$	$(q_{20}, 1, \mathtt{R})$	$(q_{30}, 0, \mathtt{R})$
q_{21}	$(q_{21}, 0, \mathtt{R})$	$(q_{21}, 1, \mathtt{R})$	$(q_{31}, 1, \mathtt{R})$
q_{30}	—	—	$(q_4, 0, \mathtt{L})$
q_{31}	—	—	$(q_4, 1, \mathtt{L})$
q_4	$(q_4, 0, \mathtt{L})$	$(q_4, 1, \mathtt{L})$	$(q_5, B, \mathtt{L})$
q_5	$(q_5, 0, \mathtt{L})$	$(q_5, 1, \mathtt{L})$	$(q_0, B, \mathtt{R})$
q_6	—	—	—

Hier bedeutet ‚—' in Zeile q und Spalte σ den Eintrag $(q, \sigma, \mathtt{N})$.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Konfigurationsfolge:

$$
\begin{array}{llllllll}
Bq_0 01 & \vdash & & \vdash & & \vdash & 1Bq_{20}B \\
1B0q_{30}B & \vdash & & \vdash & & \vdash & q_5 1B00 \\
q_5 B1B00 & \vdash & & \vdash & & \vdash & Bq_{21}00 \\
B0q_{21}0 & \vdash & & \vdash & B001q_{31}B & \vdash & B00q_4 11 \\
B0q_4 011 & \vdash & & \vdash & q_4 B0011 & \vdash & q_5 BB0011 \\
q_0 B0011 & \vdash & q_6 B0011 & & & &
\end{array}
$$

(b) Geben Sie eine informelle Beschreibung in Worten für die Bedeutung der Zustände q_0, q_{10}, q_{20}, q_{30} und (**auf der nächsten Seite!**) q_4 und q_5 an.

q_0:

q_{10}:

q_{20}:

q_{30}:

q_4:

q_5:

(c) Die obige Turingmaschine liefert für $w \in \Sigma^*$ nach endlich vielen Schritten einen Output $f(w) \in \Sigma^*$. Beschreiben Sie die so definierte Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$.

(d) Geben Sie Speicherplatzbedarf und Laufzeit der Maschine asymptotisch in Abhängigkeit von der Eingabelänge n an.

- Speicherbedarf:

- Laufzeit:

8. Aufgabe

(8 Punkte)

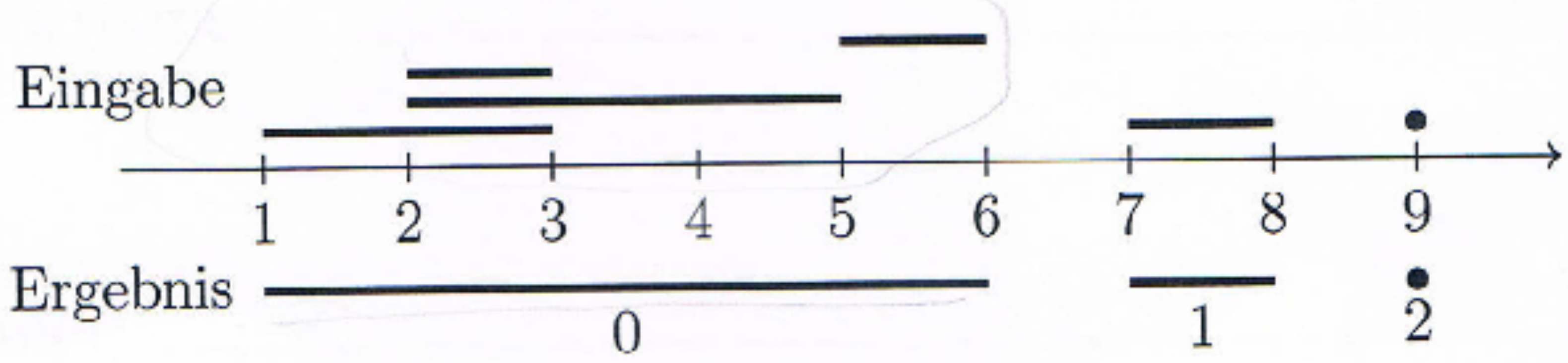
In dieser Aufgabe soll eine Familie von Intervallen zu paarweise disjunkten Intervallen zusammengefasst werden.

Formal lässt sich die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener reeller Intervalle $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_{n-1}, b_{n-1}]$ eindeutig schreiben als

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, b_k] = \bigcup_{i=0}^{m-1} [\alpha_i, \beta_i]$$

mit $\beta_i \geq \alpha_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ und $\alpha_i > \beta_{i-1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Beispiel 1:



Hier ist $m = 3$ und $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 6$, $\alpha_1 = 7$, $\beta_1 = 8$, $\alpha_2 = 9$ und $\beta_2 = 9$.

Beispiel 2: Für $[a_0, b_0] = [0, 2]$, $[a_1, b_1] = [4, 4]$, $[a_2, b_2] = [1, 3]$ ist

$$[0, 2] \cup [4, 4] \cup [1, 3] = [0, 3] \cup [4, 4],$$

d. h. $m = 2$ und $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 3$, $\alpha_1 = 4$ und $\beta_1 = 4$.

Aufgabe:

Schreiben Sie eine `python`-Funktion, die eine Liste der Paare (α_i, β_i) für $i = 0, \ldots, m-1$ berechnet. Sie dürfen alle `python`-Befehle benutzen, die ohne das Importieren zusätzlicher Pakete in `python3` zur Verfügung stehen.

Aufrufparameter: Liste L = `[(`a_0`,`b_0`),(`a_1`,`b_1`),...,(`a_{n-1}`,`b_{n-1}`)]` von Paaren ganzer Zahlen mit $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dabei ist die Länge n der Liste eine beliebige nicht negative ganze Zahl.

Rückgabewert: Liste M = `[(`α_0`,`β_0`),(`α_1`,`β_1`),...,(`α_{m-1}`,`β_{m-1}`)]` von Paaren der Intervallgrenzen α_i und β_i in der oben beschriebenen Darstellung.