Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6–2, Antje Schulz
Prof. Dr. Michael Joswig
Sven Jäger, Georg Loho, Dr. Frank Lutz

SS 2017

Modulklausur zur Computerorientierten Mathematik I+II

13.10.2017, Beginn: 11:15 Uhr, Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Nachname, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bitte nicht mit Bleistift oder mit roter Farbe schreiben!

*Die Klausur ist mit mindestens **36** (ITM/NidI: **28**) **Punkten** bestanden.*

1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
10	9	14	10	11	10	5	11	80

1. Aufgabe (4 + 2 + 4 Punkte)

(a) (i) Zeichen Sie den einfachen ungerichteten Graphen G mit Inzidenzmatrix

$$I_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und beschriften Sie seine Knoten.

(ii) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G mit den zugehörigen Beschriftungen an.

(b) Sei G ein einfacher, ungerichteter Graph mit n Knoten. Geben Sie zwei weitere äquivalente Bedingungen an, unter denen G ein Baum ist:

(i) G ist kreisfrei mit $n-1$ Kanten.

(ii) G ist zusammenhängend mit $n-1$ Kanten.

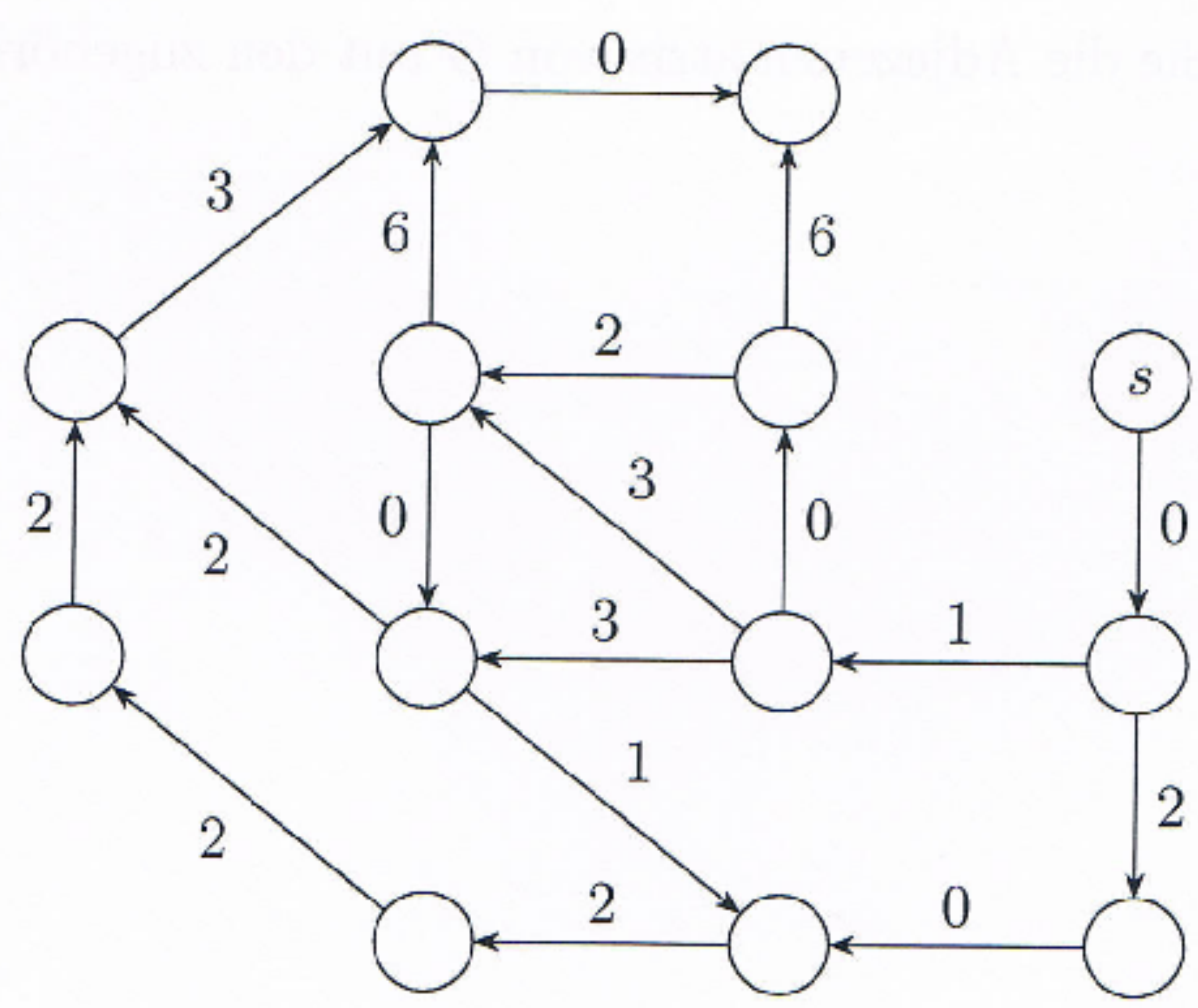
(iii) ______________________________

____

(iv) ______________________________

____

(c) Bestimmen Sie in folgendem Graphen die kürzesten Wege von s zu jedem anderen Knoten, indem Sie alle Kanten des Baums der kürzesten Wege in dem Graphen markieren. Schreiben Sie außerdem in jeden Knoten ungleich s die Nummer, als wievielter der Knoten aus der Prioritätswarteschlange in Dijkstras Algorithmus extrahiert wird.



2. Aufgabe (3 + 4 + 2 Punkte)

(a) Begründen Sie, dass für $E = \{a, b, c, d, e\}$ und

$$\mathcal{I} \;=\; \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

das Paar $(E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid bildet.

(b) Betrachten Sie das Matroid $(E, \mathcal{I})$, wobei $E = \{a, b, c, d, e\}$ die Menge der Spalten der reellen Matrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

bezeichne und $\mathcal{I}$ die Menge der linear unabhängigen Teilmengen von E ist. Geben Sie sämtliche Basen und Kreise des Matroids $(E, \mathcal{I})$ an.

(c) Gegeben sei ein Matroid $(E, \mathcal{I})$ mit $E = \{a, b, c\}$ und Basismenge

$$B \;=\; \{\,\{a, b, c\}\,\}.$$

Zeichnen Sie alle diejenigen Graphen $G = (V, E)$, die keine isolierten Knoten haben, so dass $(E, \mathcal{I})$ das graphische Matroid von G ist.

3. Aufgabe (3 + 5 + 4 + 2 Punkte)

(a) Geben Sie für zwei vergleichsbasierte Sortierverfahren (außer Quicksort) die Laufzeit (in Abhängigkeit von der Länge n der zu sortierenden Liste) im schlechtesten Fall sowie im Fall einer sortierten Liste jeweils in Θ-Notation an.

Verfahren	Laufzeit im Worst-Case	Laufzeit sortierte Liste

(b) Führen Sie Insertionsort für die folgende Liste durch:

$$[7, 11, 4, 2, 6, 9].$$

(i) Geben Sie hierbei die Zwischenergebnisse an:

(ii) Erläutern Sie kurz die Ideen des Algorithmus:

(iii) Nennen Sie einen Vorteil von Insertionsort gegenüber Merge-Sort:

(c) Erläutern Sie den Beweis für die untere Laufzeit-Schranke für Merge-Sort.

(d) Welches Sortierverfahren bietet sich an, wenn man n ganze Zahlen sortieren muss, die aus dem Wertebereich von 0 bis $4n$ kommen? Begründen Sie kurz Ihre Wahl.

4. Aufgabe (2 + 4 + 4 Punkte)

In den in dieser Aufgabe betrachteten Codes sind alle Codewörter 0-1-Strings.

(a) (i) Wann heißt ein Code Präfixcode?

(ii) Geben Sie (ohne Begründung) ein Beispiel für einen Code, der eindeutig dekodierbar, aber kein Präfixcode ist.

(b) Sei C ein Alphabet und für $c \in C$ sei $\beta_c > 0$ die Häufigkeit des Zeichens c. Zeigen Sie: Bei jedem optimalen Präfixcode für C und $(\beta_c)_{c \in C}$ besteht kein Codewort aus mehr als $|C| - 1$ Bits.

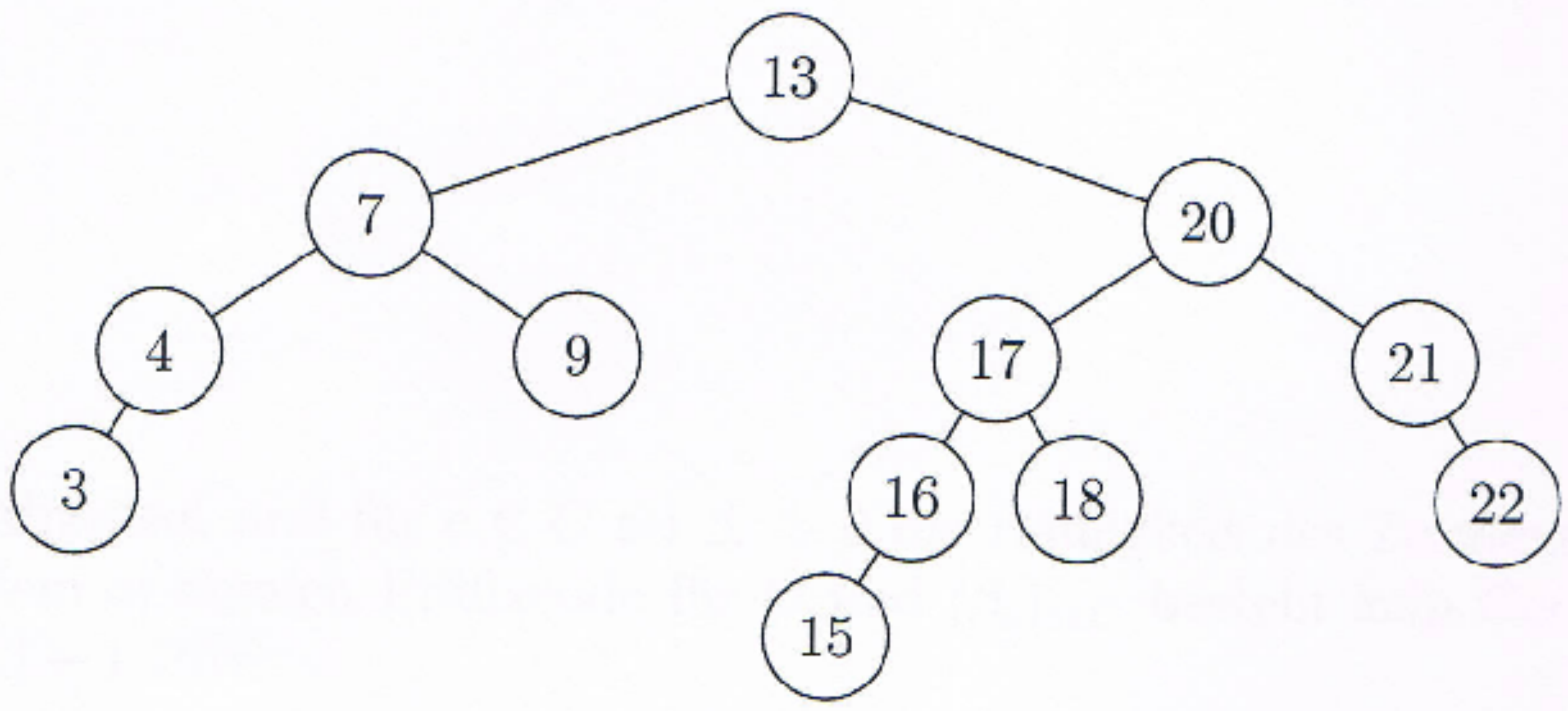
(c) Geben Sie den Huffman-Baum an, der einen optimalen Präfixcode für den folgenden Text (einschließlich der Leerzeichen) liefert. Nicht im Text vorkommende Zeichen müssen nicht kodiert werden. Notieren Sie die Häufigkeiten, die bei der Erstellung des Baums auftreten, an den entsprechenden Knoten (Blätter und innere Knoten).

`sie␣rettete␣ihr␣reittier`

5. Aufgabe (2 + 3 + 2 + 4 Punkte)

(a) Geben Sie die Worst-Case-Laufzeiten der Operation `insert` für einen AVL-Baum und für einen Splay-Baum mit n Knoten in $\mathcal{O}$-Notation an.

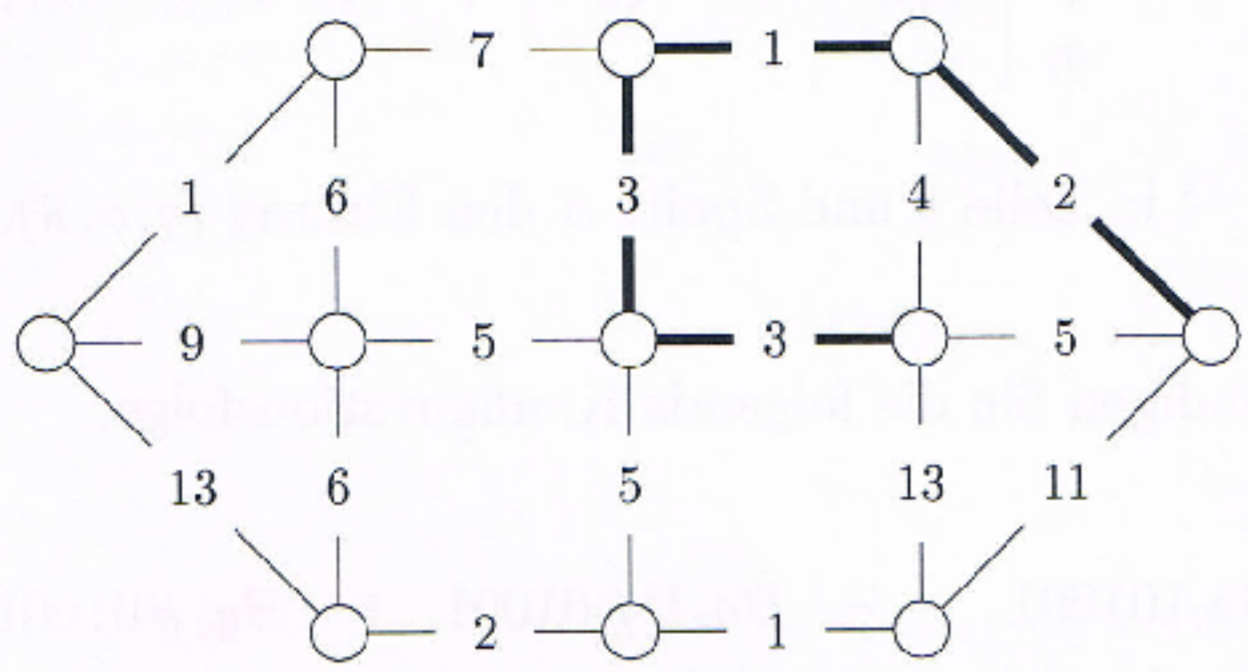
(b) Aus folgendem AVL-Baum wird der Schlüssel 9 gelöscht. Um die AVL-Baum-Eigenschaft wiederherzustellen müssen diverse Rotationen durchgeführt werden. Geben Sie den Zustand nach jeder durchgeführten Rotation und die Bezeichnung der jeweiligen Rotationen an. Gegebenenfalls auftretende Doppelrotationen sollen als Einzelrotationen geschrieben werden.



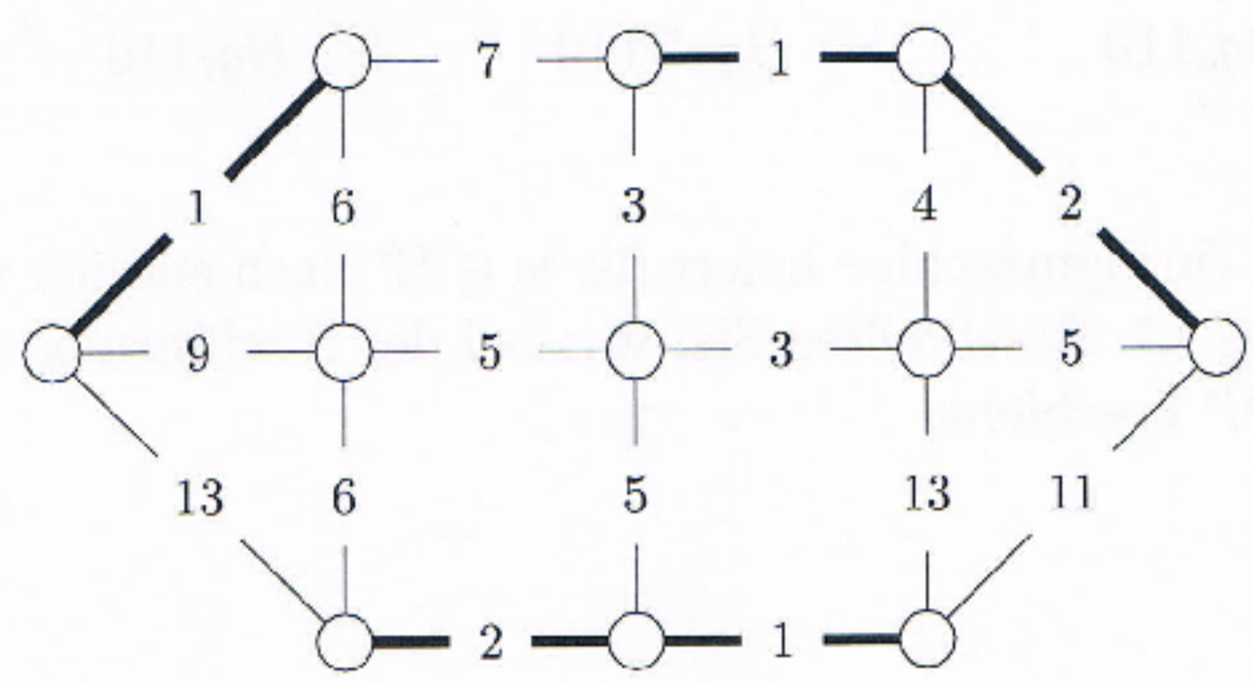
(c) Erläutern Sie kurz den algorithmischen Ablauf von Prim und von Kruskal.

(d) In den folgenden zwei Abbildungen ist jeweils ein Teil der Kantenmenge eines ungerichteten Graphen G markiert. Geben Sie an, ob diese Kantenmenge ein Zwischenergebnis des Algorithmus von Prim oder Kruskal zur Bestimmung eines minimalen Spannbaums auf G sein kann. Begründen Sie jeweils kurz ihre Aussage und dabei insbesondere, was für oder gegen den Algorithmus von Prim bzw. Kruskal spricht.

(i)



(ii)



6. Aufgabe (4 + 2 + 4 Punkte)

Gegeben sei die folgende deterministische Turingmaschine mit Startzustand q_0, Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\#, B\}$ und Menge akzeptierender Zustände $F = \{q_7\}$:

δ	0	1	#	B
q_0	$(q_1, \#, \mathtt{L})$	$(q_2, \#, \mathtt{L})$	—	$(q_6, B, \mathtt{L})$
q_1	$(q_3, 0, \mathtt{R})$	$(q_3, 1, \mathtt{R})$	$(q_1, \#, \mathtt{L})$	$(q_3, B, \mathtt{R})$
q_2	$(q_4, 0, \mathtt{R})$	$(q_4, 1, \mathtt{R})$	$(q_2, \#, \mathtt{L})$	$(q_4, B, \mathtt{R})$
q_3	—	—	$(q_5, 0, \mathtt{R})$	—
q_4	—	—	$(q_5, 1, \mathtt{R})$	—
q_5	$(q_0, \#, \mathtt{R})$	$(q_0, \#, \mathtt{R})$	$(q_5, \#, \mathtt{R})$	$(q_6, B, \mathtt{L})$
q_6	$(q_6, 0, \mathtt{L})$	$(q_6, 1, \mathtt{L})$	$(q_6, B, \mathtt{L})$	$(q_7, B, \mathtt{R})$
q_7	—	—	—	—

Hier bedeutet ‚—' in Zeile q und Spalte σ den Eintrag $(q, \sigma, \mathtt{N})$.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Konfigurationsfolge:

B $Bq_0101001$	$\vdash Bq_2B\#01001$	$\vdash Bq_4\#01001$	$\vdash 1q_501001$
$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$	$\vdash$
$\vdash 11q_5\#001$	$\vdash 11\#q_5001$	$\vdash 11\#\#q_001$	$\vdash 11\#q_1\#\#1$
$\vdash 11q_1\#\#\#1$	$\vdash 1q_11\#\#\#1$	$\vdash 11q_3\#\#\#1$	$\vdash$
$\vdash 110\#q_5\#1$	$\vdash 110\#\#q_51$	$\vdash 110\#\#\#q_0B$	$\vdash$
$\vdash$	$\vdash$	$\vdash 11q_60$	$\vdash 1q_610$
$\vdash Bq_6110$	$\vdash Bq_6B110$	$\vdash Bq_7110$	

(b) Die obige Turingmaschine liefert für $w \in \Sigma^*$ nach endlich vielen Schritten einen Output $f(w) \in \Sigma^*$. Beschreiben Sie, was bei der Ausführung der so definierten Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ geschieht.

(c) Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung) die exakte Anzahl der Konfigurationsübergänge der Maschine in Abhängigkeit von der Eingabelänge n.

Hinweis: Zählen Sie, wie oft die Turingmaschine die Laufrichtung ändert und wie viele Schritte sie jeweils in eine Richtung läuft. Unterscheiden Sie die Fälle, dass die Eingabelänge gerade bzw. ungerade ist.

7. Aufgabe

(5 Punkte)

Bei den folgenden Teilaufgaben (a)–(e) ist jeweils genau eine der zur Auswahl stehenden Antworten zutreffend. Kennzeichnen Sie die jeweils korrekte Antwort durch das Setzen genau eines Kreuzes pro Teilaufgabe.

(a) Seien $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist **wahr**?

- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$, so ist $f \notin \Omega(g^2)$.
- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h)$, so ist $h \in \Theta(f)$.
- ☐ Ist $f \in \mathcal{O}(g)$, so gibt es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$, so dass für alle $\alpha > 0$ die Ungleichung $f(n) \leq \alpha g(n)$ gilt.
- ☐ Ist $f \in \Omega(g)$, so gibt es ein $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gibt mit $f(n) \geq \alpha g(n)$.

(b) Was ist die Binärdarstellung von $(41)_7$ (Darstellung zur Basis 7)?

☐ 100011 ☐ 11011 ☐ 111011 ☐ 11101

(c) Welche der folgenden Ausdrücke liefert in Python 3 `True`?

- ☐ round(-1.5)==-1
- ☐ (2e+15+2e-15)*(2e+15+2e-15)==4e+30
- ☐ 0.1+0.1+0.1==0.3
- ☐ 0.1+0.2+0.3==0.3+0.2+0.1

(d) Sei T ein Baum mit n Knoten. Wie viele verschiedene ungerichtete Graphen mit n Knoten und n Kanten gibt es, die T als Teilgraphen enthalten (wobei jede Kante mit dem Paar $\{v, w\}$ der beiden verbundenen Knoten v und w identifiziert wird)?

☐ $n - 1$ ☐ $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ☐ $\frac{(n-1)n}{2}$ ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$

(e) Sei Σ ein Alphabet. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ☐ Die Menge aller Entscheidungsprobleme über Σ^* ist überabzählbar.
- ☐ Die Menge aller entscheidbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
- ☐ Die Menge aller semi-entscheidbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
- ☐ Jede unentscheidbare Sprache über Σ ist abzählbar.

8. Aufgabe

(8 + 3 Punkte)

Es sei L eine Liste paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen und es sei „$\geq$" eine Relation darauf. Ein Listenelement a_i heißt *lokales Maximum*, wenn $a_i \geq a_{i-1}$ und $a_i \geq a_{i+1}$ gilt, wobei a_{i+1} und a_{i-1} die zwei Nachbarn von a_i in der Liste sind. Das erste und das letzte Element einer Liste sind insbesondere nie lokale Maxima.

Die folgenden Funktionen sollen in Python geschrieben werden. Hierbei dürfen keine Funktionalitäten importiert werden. Denken Sie insbesondere daran, dass die meisten mathematischen Funktionen in Python erst importiert werden müssten.

(a) Schreiben Sie Funktionen, mit denen man Folgendes bestimmen kann:

  (i) den Index eines minimalen lokalen Maximums einer Liste L bezüglich der gewöhnlichen „kleiner-gleich"-Relation;

  (ii) den Index eines minimalen lokalen Maximums einer Liste L bezüglich der folgenden Relation: Es gilt

$$a \geq b \qquad \Leftrightarrow \qquad \big(\operatorname{ggT}(a, b) = 1 \;\text{ und }\; \max(a, b) = a \big) \ .$$

  Hinweis 1: Die Minimumsbestimmung soll jeweils anhand der gewöhnlichen „kleiner-gleich"-Ordung vorgenommen werden.

  Hinweis 2: Falls kein lokales Maximum existiert, soll -1 zurückgegeben werden.

(b) Erläutern Sie die Laufzeiten Ihrer Funktionen in Abhängigkeit von den Eingabegrößen asymptotisch in $\mathcal{O}$-Notation.