DGL und Numerik für Maschinenbau, WiSe 19/20, 1. Termin bei Prof. Karow, 90min

1. Geben Sie die allgemeine Lösung dieser DGL an:
   a. $y' = (x^3 + 1)y^2$
   b. $y' = (x^5 - \sin(4x))y$
2. Geben Sie alle reellen Lösungen an:
   a. $y'' - 8y' + 16y = 0$
   b. $y'' - 4y' + 29y = 100e^{-3t}$
3. Bestimmten sie c>0 so, dass $u = \sin(3x + 6t)$ die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0$ löst.
4. Gegeben ist:
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}_{W}$$
   a. Rechnen Sie nach, dass gilt $V^{-1} = W$
   b. Lesen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A ab.
   c. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ als Linearkombinationen der Basislösungen.
   d. Bestimmen Sie e^{At}. Das Produkt muss nicht ausgerechnet werden.
5. Die Vektorwertige DGL $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y'' + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} y = 0$ hat das charakteristische Polynom ... $= \begin{bmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 6 & \lambda^2 - 7\lambda + 9 \end{bmatrix}$ und die einfachen Eigenwerte -3, 2 und 5. Berechnen Sie daraus die Eigenvektoren sowie die allgemeine Lösung.
6. Formulieren Sie die Rechenvorschrift für einen impliziten und einen expliziten Euler-Schritt für $y' = Ay; A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}$.
7. Berechnen Sie $\|A\|_\infty$ und $cond_\infty(A)$ für $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.
8. Gegeben ist die Matrix $A_u = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & u \end{bmatrix}$.
   a. Für welche u ist diese Matrix positiv definit?
   b. Nehmen Sie eine Cholesky-Zerlegung vor.
   c. Schreiben Sie die quadratische Form $x^T A x = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ mit den richtigen Koeffizienten auf.
9. Gegeben sind folgende Werte für ein Polynom $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$:

x_i	-1	0	5
y_i	3	7	1

   a. Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a auf. Das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.
   b. Schreiben Sie das Polynom in Lagrange-Schreibweise. Die Produkte müssen dabei nicht ausgerechnet werden.
10. Schreiben Sie die Berechnungsvorschrift für die Newton-Nullstellenannäherung für die Funktion $f(x) = x - \cos(x)$.
11. Schreiben Sie ein Matlab- oder Python-Programm, das eine Annäherung an das Integral $\int_2^7 \sin(x^2)\,dx$ mit dem Trapez-Verfahren durchführt. Zur Erinnerung: Die Rechenvorschrift für die Trapezregel lautet $\int_a^b f(x) \approx T = h(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih))$
12. Schreiben Sie ein Matlab- oder Python-Programm, das folgende Matrix erstellt:
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ & 4 & 9 & & n^2 \\ & & 9 & & n^2 \\ & & & & \dots \\ & & & & n^2 \end{bmatrix}$$